Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 06

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	16	39.02%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	5	12.20%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	4	9.76%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	23	56.10%
Gesamt(Brutto)	**48**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	4	9.76%
Keine Antwort	14	34.15%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	23	56.10%
Gesamt(Brutto)	**41**	**100.00%**

Gehäuftes Interesse an:

(1) Faktorgruppen und Homomorphiesatz

(2) Kommutatorgruppe

(3) Ringbasics, Pullback

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Bedeutung der Normalteilereigenschaft herausarbeiten
(2) Intuition für Faktorgruppen verbessern
(3) Aussage des Homomorphiesatzes herausarbeiten

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick
(2) Normalteiler und Faktorgruppen wiederholen
(3) „L/R-Faktorgruppen“ untersuchen
(4) Zwei Resultate für Normalteiler und Kommutatoren zeigen
(5) Homomorphiesatz (noch einmal) motivieren und intuitiv erklären
(6) Ringbasics und Pullback wiederholen (?)

Wochenüberblick

Wiederholung Normalteiler und Faktorgruppe

Definition

(1) Eine Untergruppe $(N, \star)$ heißt eine **normale Untergruppe** oder **Normalteiler** von $(G, \star)$, wenn gilt:

$$\underbrace{a \star N}_{[a]_{\sim N}} = \underbrace{N \star a}_{[a]_{N\sim}} \quad \text{für alle } a \in G.$$

(2) $G \,/\, N := \big\{[a] = a \star N \,\big|\, a \in G\big\}$ heißt **Faktormenge**.

(3) $(G \,/\, N, \widetilde{\star})$ mit $[a] \mathbin{\widetilde{\star}} [b] := [a \star b]$ ist die **Faktorgruppe**.

(4) $\pi \colon G \ni a \mapsto [a] \in G \,/\, N$ heißt **kanonische Surjektion**.

Die Bedeutung der Normalteilereigenschaft

Warum nehmen wir nicht eine Untergruppe U, die Verknüpfung $[a] \mathbin{\widetilde{\star}} [b] := [a \star b]$ und untersuchen

$$\big(\{[a]_{\sim U} \mid a \in G\}, \widetilde{\star}\big) \text{ (eine potentielle „Linksfaktorgruppe“),}$$
$$\big(\{[a]_{U\sim} \mid a \in G\}, \widetilde{\star}\big) \text{ (eine potentielle „Rechtsfaktorgruppe“)?}$$

Normalteiler in der S_3

Untergruppen der S_3

Siehe Vorlesungsmitschrift: $\{e, d, d^2\}$, $\{e, s_1\}$, $\{e, s_2\}$, $\{e, s_3\}$

Für $U = \{e, d, d^2\}$ (Normalteiler)

$\circ$	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
e	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
d	d	d^2	e	s_3	s_1	s_2
d^2	d^2	e	d	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	d	d^2
s_2	s_2	s_3	s_1	d^2	e	d
s_3	s_3	s_1	s_2	d	d^2	e

Für $U = \{e, s_3\}$ (kein Normalteiler)

$\circ$	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
e	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
d	d	d^2	e	s_3	s_1	s_2
d^2	d^2	e	d	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	d	d^2
s_2	s_2	s_3	s_1	d^2	e	d
s_3	s_3	s_1	s_2	d	d^2	e

Nachprüfen der Normalteilereigenschaft

Lemma

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(N, \star)$ eine Untergruppe. Dann ist $(N, \star)$ genau dann ein Normalteiler, wenn

$$a \star N \star a' \subseteq N \quad \forall a \in G.$$

Beweis.

Kommutatorgruppe und Kommutativität der Faktorgruppe

Lemma

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe, $K(G) = \langle\{a \star b \star a' \star b' \mid a, b \in G\}\rangle$ die Kommutatorgruppe von G sowie $(N, \star)$ ein Normalteiler. Dann gilt:

(1) $G \,/\, N$ ist genau dann abelsch, wenn $K(G) \subseteq N$

(2) $K(G)$ ist selbst ein Normalteiler

Beweis.

Wiederholung Homomorphismus, Bild und Kern

Definition

(1) Eine strukturverträgliche Abbildung $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \Box)$ heißt **Homomorphismus**.

(2) $\mathrm{Bild}(f) := \{f(x) \in G_2 \mid x \in G_1\} = f(G_1)$ heißt **Bild** von f.

(3) $\mathrm{Kern}(f) := \{x_1 \in G_1 \mid f(x) = e_2\} = f^{-1}(\{e_2\})$ heißt **Kern** von f.

Motivation Homomorphiesatz

Wie „macht“ man eigentlich eine Funktion bijektiv?

$$f : G_1 \to G_2$$

Surjektivität:

Injektivität:

Die Bedeutung des Kerns

Lemma

Es sei $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \square)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Dann gilt
$$f^{-1}(\{f(a)\}) = a \star \mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f) \star a,$$
also ist $\mathrm{Kern}(f)$ ein Normalteiler von G_1.

Homomorphiesatz für Gruppen

Satz

Es sei $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \square)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Dann ist

$$\begin{aligned} I\colon\ G_1 \,/\, \mathrm{Kern}(f) &\longrightarrow \mathrm{Bild}(f) \\ [a] &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Implikationen für Kardinalitäten (Hausaufgabe 6.2)

Lemma

Ist $f : (G_1, \star) \to (G_2, \Box)$ ein Gruppenhomomorphismus und sind $\# G_1$ und $\# G_2$ teilerfremd, dann ist f trivial.

Beweis.

Ringe und ihre Homomorphismen

Definition

(1) $(R, +, \cdot)$ ist ein **Ring**, wenn:

(1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(2) $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.

(3) Es gelten die **Distributivgesetze**

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$
$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

(2) $f : R_1 \to R_2$ heißt **Homomorphismus**, wenn:

$$f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in R_1,$$
$$f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in R_1.$$

Besitzen beide Ringe ein Einselement, dann $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ gefordert.

Homomorphismus von Ringen

Beispiel

(1) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, X, Y Mengen und $\varphi\colon Y \to X$.

φ induziert einen Ringhomomorphismus

$$\varphi^*\colon (R^X, +, \cdot) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in (R^Y, +, \cdot),$$

genannt den **Pullback** φ^* von φ.