Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 06

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	16	39.02%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	5	12.20%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	4	9.76%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	23	56.10%
Gesamt(Brutto)	**48**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort Ansehen	4	9.76%
Keine Antwort	14	34.15%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	23	56.10%
Gesamt(Brutto)	**41**	**100.00%**

Gehäuftes Interesse an:

(1) Faktorgruppen und Homomorphiesatz

(2) Kommutatorgruppe

(3) Ringbasics, Pullback

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Bedeutung der Normalteilereigenschaft herausarbeiten

(2) Intuition für Faktorgruppen verbessern

(3) Aussage des Homomorphiesatzes herausarbeiten

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick

(2) Normalteiler und Faktorgruppen wiederholen

(3) „L/R-Faktorgruppen“ untersuchen

(4) Zwei Resultate für Normalteiler und Kommutatoren zeigen

(5) Homomorphiesatz (noch einmal) motivieren und intuitiv erklären

(6) Ringbasics und Pullback wiederholen (?)

Wochenüberblick

Halbgruppen, Monoide $\xrightarrow[e]{a^{-1}}$ Gruppen $(G,*)$ → Untergruppen $(U,*_U)$ mit e

Nebenklassen $[a]_{\sim_U}$, $[a]_{\sim_U}$

Partitionen, i.A. keine Gruppenstruktur

↓ Alle L/R Nebenkl. stimmen überein $a*N = N*a \ \forall a \in G$

Normalteiler $(N,*) \trianglelefteq (G,*)$, $\sim_N$ ← "Normale Untergruppe"

↓ induziert

Faktorgruppen ≙ Mengen Normalteilernebenklassen mit Faktorverknüpfung $\bar{*}$ $(G/N, \bar{*})$ ← Nicht $G \setminus N$

$G/N := \{[a]_{\sim_N} \mid a \in G\} \subseteq \mathcal{P}(G)$

Homomorphiesatz f. Gr. $f: G_1 \to G_2$, $G_1/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Bild}(f)$

Gruppen → zweite assoziative Verknüpfung "·" und Distributivität

Ringe $(R,+,\cdot)$

$(R,+)$ abelsche Gruppe + Distributivität

$(R,\cdot)$ Halbgruppe

- mit 1_R
- Kommutativität bzgl. ·
- Nullteilerfreiheit

Integritätsring

Nullring ← nicht

Charakteristik

$\min\{n \in \mathbb{N} \mid n 1_R = 0_R\} = \mathrm{ord}(1_R)$ in $(R,+)$

Homomorphismen

Definition

(1) Eine Untergruppe $(N, \star)$ heißt eine **normale Untergruppe** oder **Normalteiler** von $(G, \star)$, wenn gilt:

Mengengleichheit der Nebenklassen $\Rightarrow$

$$\underbrace{a \star N}_{[a]_{\sim N}} = \underbrace{N \star a}_{[a]_{N\sim}} \quad \text{für alle } a \in G.$$

Schwächere Forderung als: $a \star n = n \star a \quad \forall a \in G \ \forall n \in N$

(2) $G \,/\, N := \{[a] = a \star N \mid a \in G\}$ heißt **Faktormenge**.

Äquivalenzklassen $\quad G/N \subseteq \mathcal{P}(G)$

(3) $(G \,/\, N, \tilde{\star})$ mit $[a] \,\tilde{\star}\, [b] := [a \star b]$ ist die **Faktorgruppe**.

$[a] \,\tilde{\star}\, [b] = (a \star N) \,\tilde{\star}\, (b \star N) = (a \star b) \star N$

(4) $\pi\colon G \ni a \mapsto [a] \in G \,/\, N$ heißt **kanonische Surjektion**.

Wichtig nach dem Homomorphiesatz

Die Bedeutung der Normalteilereigenschaft

Warum nehmen wir nicht eine Untergruppe U, die Verknüpfung $[a] \tilde{\star} [b] := [a \star b]$ und untersuchen

$$(\{[a]_{\sim U} \mid a \in G\}, \tilde{\star}) \text{ (eine potentielle „Linksfaktorgruppe"),}$$
$$(\{[a]_{U\sim} \mid a \in G\}, \tilde{\star}) \text{ (eine potentielle „Rechtsfaktorgruppe")?}$$

Damit $\tilde{\star}$ wohldefiniert ist, muss $\tilde{\star}$ repräsentantenunabhängig arbeiten.

Bei Normalteilern N und $[a_1] = [a_2]$, $[b_1] = [b_2]$ gilt:

$$[a_2] \tilde{\star} [b_2] = [a_2 \star b_2] = a_2 \star b_2 \star N \overset{UG}{=} a_2 \star b_2 \star N \star N$$

$$\overset{NT}{=} \underbrace{a_2 \star N}_{[a_2]} \star \underbrace{b_2 \star N}_{[b_2]} = [a_1] \tilde{\star} [b_1]$$

Für nicht normale Untergruppen ist das i. A. nicht der Fall. Dann können wir zwar L/R-Nebenklassen bilden, aber nicht vernünftig mit ihnen rechnen.

Normalteiler in der S_3

Einziger Normalteiler

Untergruppen der S_3

Siehe Vorlesungsmitschrift: $\{e, d, d^2\}$, $\{e, s_1\}$, $\{e, s_2\}$, $\{e, s_3\}$

Für $U = \{e, d, d^2\}$ (Normalteiler)

U   RNK

$\circ$	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
e	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
d	d	d^2	e	s_3	s_1	s_2
d^2	d^2	e	d	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	d	d^2
s_2	s_2	s_3	s_1	d^2	e	d
s_3	s_3	s_1	s_2	d	d^2	e

U   LNK

Für $U = \{e, s_3\}$ (kein Normalteiler)

U

$\circ$	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
e	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
d	d	d^2	e	s_3	s_1	s_2
d^2	d^2	e	d	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	d	d^2
s_2	s_2	s_3	s_1	d^2	e	d
s_3	s_3	s_1	s_2	d	d^2	e

U

LNK und RNK stimmen überein. $\Rightarrow$ Normalteiler

Trotzdem $d * s_1 \neq s_1 * d$

Partition in Nebenklassen $\{e, d, d^2\}$ $\{s_1, s_2, s_3\}$

$[d] * [s_1] = [d * s_1] = \{s_1, s_2, s_3\}$

$[s_1] * [d] = [s_1 * d] = \{s_1, s_2, s_3\}$

LNK $\{e, s_3\}, \{d, s_2\}, \{d^2, s_1\}$

RNK $\{e, s_3\}, \{d, s_1\}, \{d^2, s_2\}$

Verschiedene R/L NK $\Rightarrow$ kein Normalteiler

$[d * d^2] = [e] = \{e, s_3\}$

!

$[s_2 * s_1] = [d^2] = \{d^2, s_1\}$

Repräsentanten-abhängig

Nachprüfen der Normalteilereigenschaft

Lemma

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(N, \star)$ eine Untergruppe. Dann ist $(N, \star)$ genau dann ein Normalteiler, wenn

$a \star n \star a' \in N \quad \forall a \in G, n \in N$

$$a \star N \star a' \subseteq N \quad \forall a \in G.$$

Beweis. N Normalteiler $\Leftrightarrow a \star N = N \star a \quad \forall a \in G$

$\Leftrightarrow a \star N \star a' = N \quad \forall a \in G$

$\Leftrightarrow (a \star N \star a' \subseteq N \wedge a \star N \star a' \supseteq N) \quad \forall a \in G$

$\Leftrightarrow (a \star N \star a' \subseteq N \ \forall a \in G) \wedge (a \star N \star a' \supseteq N \ \forall a \in G)$

Zweimal die gleiche Bedingung mit $\wedge$ verknüpft.

$\Leftrightarrow (a \star N \star a' \subseteq N \ \forall a \in G) \wedge (N \supseteq a' \star N \star a \ \forall a \in G)$

$\Leftrightarrow a \star N \star a' \subseteq N \quad \forall a \in G$

$\square$

Lemma

Es sei $(G,\star)$ eine Gruppe, $K(G) = \langle\{a\star b\star a'\star b' \mid a,b\in G\}\rangle$ die Kommutatorgruppe von G sowie $(N,\star)$ ein Normalteiler. Dann gilt:

(1) $G\,/\,N$ ist genau dann abelsch, wenn $K(G)\subseteq N$

(2) $K(G)$ ist selbst ein Normalteiler $\Rightarrow G/K(G)$ ist die feinste abelsche Faktorgruppe aus G.

Beweis. (1) G/N abelsch $\Leftrightarrow [a]\bar\star[b]=[b]\bar\star[a]\ \forall a,b\in G$

$\Leftrightarrow [a\star b] = [b\star a]\ \forall a,b\in G$

$\Leftrightarrow a\star b\star N = b\star a\star N\ \forall a,b\in G$

$\Leftrightarrow \underbrace{a'\star b'\star a\star b}_{\text{Kom.}}\star N = N\ \forall a,b\in G$

TGK $\Leftrightarrow a'\star b'\star a\star b\in N\ \forall a,b\in G$

Hülle $\Leftrightarrow K(G)\subseteq N$

Anwendung des Resultats der Vorfolie:

(2) Sei $k\in K(G)$ und $a\in G$: $a\star k\star a' = \underbrace{k}_{\in K(G)}\star\overbrace{k'\star a\star k\star a'}^{\text{Kommutator}}\in K(G)$ $\square$

Definition

(1) Eine strukturverträgliche Abbildung $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \Box)$ heißt **Homomorphismus**.

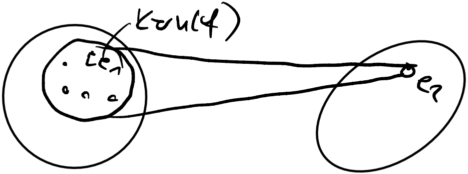
$f(a \star b) = f(a) \Box f(b) \quad \forall a, b \in G_1$

(2) $\mathrm{Bild}(f) := \{f(x) \in G_2 \mid x \in G_1\} = f(G_1)$ heißt **Bild** von f.

Haben wir schon für bel. Fkt. definiert.

(3) $\mathrm{Kern}(f) := \{x_1 \in G_1 \mid f(x) = e_2\} = f^{-1}(\{e_2\})$ heißt **Kern** von f.

Braucht zusätzliche Struktur.



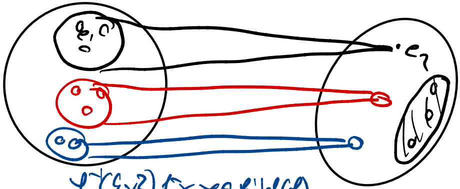
Motivation Homomorphiesatz

Wie „macht" man eigentlich eine Funktion bijektiv? Gar nicht :(Aber...

$$f: G_1 \to G_2$$

Surjektivität: Schränke f im Bildbereich ein: $\tilde{f}: G_1 \longrightarrow \mathrm{Bild}(f)$

Injektivität: Ändere den Def-Bereich bzgl. des Verhaltens von f auf $\{f^{-1}\{y\} \mid y \in \mathrm{Bild}(f)\} \subseteq \mathcal{P}(G_1)$



$f^{-1}(\{y\})$ für $y \in \mathrm{Bild}(f)$

Was, wenn wir Gruppenstruktur erhalten wollen?

Untergruppe von G_2

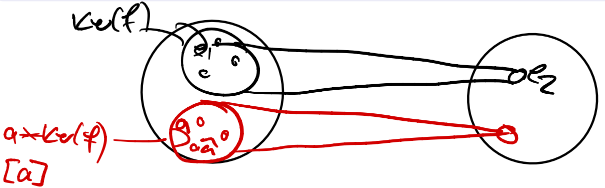
Wie rechnen wir mit den $f^{-1}(\{y\})$ und dem Bild?

Die Bedeutung des Kerns

Lemma

Es sei $f\colon (G_1, \star) \to (G_2, \Box)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Dann gilt
$$f^{-1}(\{f(a)\}) = a \star \mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f) \star a,$$
also ist $\mathrm{Kern}(f)$ ein Normalteiler von G_1.



$a, \tilde{a}$ mit $f(a) = f(\tilde{a})$

$\Leftrightarrow [a] = [\tilde{a}]$

$\Leftrightarrow \exists k \in Ker(f): \tilde{a} = a \star k$

1. Die Urbilder sind genau über den Kern charakterisiert.
2. Kern ist NT $\Rightarrow$ wir können repräsentantenunabhängig arbeiten

Ist diese geänderte Funktion immer noch strukturerhaltend?

$\downarrow$ Ja

Homomorphiesatz für Gruppen

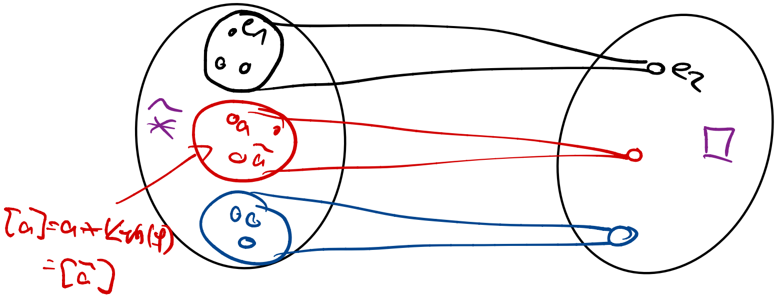
Satz

Es sei $f\colon (G_1,\star) \to (G_2,\square)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Dann ist

$$\begin{aligned} \overset{\subseteq \mathcal{P}(G_1)}{I\colon\ G_1 \,/\, \mathrm{Kern}(f)} \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{Bild}(f) \subseteq G_2 \\ [a] \quad &\longmapsto \quad f(a) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus. bzgl. $\tilde{\star}$ und $\tilde{\square}$

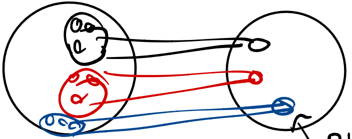


Implikationen für Kardinalitäten (Hausaufgabe 6.2)

Lemma

Ist $f\colon (G_1,\star) \to (G_2,\Box)$ ein Gruppenhomomorphismus und sind $\#G_1$ und $\#G_2$ teilerfremd, dann ist f trivial.

Beweis.



Bild(f) ist ne UG von G_2

$\#$Bild(f) teilt $\#G_2$ (Lagrange)

$\#(G_1/\mathrm{Ker}\, f) = \#$Bild(f) teilt $\#G_1$

weil alle NK gleichmächtig sind (nämlich $\#$Ker(f))

$\Rightarrow \#\mathrm{Bild}(f) \mid \#G_1 \wedge \#\mathrm{Bild}(f) \mid \#G_2$

$\Rightarrow \#\mathrm{Bild}(f) = 1$

$\Rightarrow \mathrm{Bild}(f) = \{e_2\}$

$\Box$

Definition

(1) $(R, +, \cdot)$ ist ein **Ring**, wenn:

(1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(2) $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe. ← schwache Forderung

(3) Es gelten die **Distributivgesetze**

$$\left.\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned}\right\} \text{Verträglichkeit beide Verknüpfungen}$$

(2) $f\colon R_1 \to R_2$ heißt **Homomorphismus**, wenn:

$$f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in R_1,$$
$$f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in R_1.$$

Besitzen beide Ringe ein Einselement, dann $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ gefordert.

wenn Ringhomomorphismus im Kontext von Ringen mit Eins untersucht wird.

Homomorphismus von Ringen

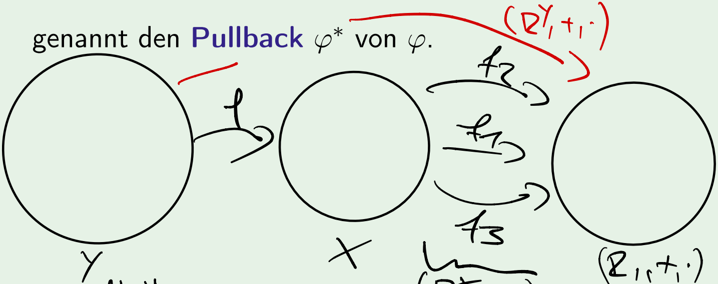
Beispiel

(1) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, X, Y Mengen und $\varphi\colon Y \to X$.

φ induziert einen Ringhomomorphismus

$$\varphi^*\colon (R^X, +, \cdot) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in (R^Y, +, \cdot),$$

genannt den **Pullback** φ^* von φ.



$(R^X,+,\cdot)$ punktw. Verknüpfungen

Additionsverträglichkeit:

$\varphi^*(f+g) = (f+g)\circ\varphi = f\circ\varphi + g\circ\varphi = \varphi^*(f) + \varphi^*(g)$

Multiplikationsverträglichkeit

$\varphi^*(f\cdot g) = (f\cdot g)\circ\varphi = f\circ\varphi \cdot g\circ\varphi = \varphi^*(f)\cdot\varphi^*(g)$