Lineare Algebra I

Woche 05

14.11.2023 und 16.11.2023

bzgl. Verknüpfung abgeschlossene Menge

Definition

Es sei $(X, \star)$ eine Menge mit Verknüpfung.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** bzgl. $\star$, wenn $\star\colon X \times X \to X$ eingeschränkt werden kann zu $\star_Y\colon Y \times Y \to Y$.

In diesem Fall heißt $\star_Y$ die auf Y **induzierte Verknüpfung**.

Beispiel

Untergruppe

Definition

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe.

1. Eine bzgl. $\star$ abgeschlossene Teilmenge $U \subseteq G$ heißt eine **Untergruppe** von $(G, \star)$, wenn $(U, \star_U)$ selbst wieder eine Gruppe ist.
2. Eine Untergruppe $(U, \star_U)$ von $(G, \star)$ heißt **echt**, wenn $U \subsetneq G$ gilt.

neutrale und inverse Elemente in einer Untergruppe

Lemma

Es sei $(U, \star_U)$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \star)$.

1. Das neutrale Element e_U von $(U, \star_U)$ ist gleich dem neutralen Element e von $(G, \star)$.
2. Das Inverse von $a \in U$ ist gleich dem Inversen von a in G.

Beweis. Hausaufgabe

Untergruppenkriterium

Satz

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe mit dem neutralen Element e sowie $U \subseteq G$. Dann sind äquivalent:

1. $(U, \star)$ ist eine Untergruppe von $(G, \star)$.
2. $U \neq \emptyset$, und für alle $a, b \in U$ gilt $a \star b' \in U$.

Beweis.

Untergruppenkriterium

Satz

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe mit dem neutralen Element e sowie $U \subseteq G$. Dann sind äquivalent:

1. $(U, \star)$ ist eine Untergruppe von $(G, \star)$.
2. $U \neq \emptyset$, und für alle $a, b \in U$ gilt $a \star b' \in U$.

Beweis.

Untergruppe

Beispiel

1. Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe mit dem neutralen Element e. Dann sind $(\{e\}, \star)$ und $(G, \star)$ die **trivialen Untergruppen** von $(G, \star)$.

2. $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$.

3. Für Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist $m\mathbb{Z} := \{m\, z \,|\, z \in \mathbb{Z}\}$ mit der Operation $+$ eine Untergruppe der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

alle Untergruppen von S_3

Beispiel

Durchschnitt von Untergruppen

Lemma

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(U_i, \star)_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen mit Indexmenge $I \neq \emptyset$.

Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ mit $\star$ eine Untergruppe von $(G, \star)$.

Beweis. Hausaufgabe

erzeugte Untergruppe

Definition

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $E \subseteq G$.

Dann heißt

$$\langle E \rangle \coloneqq \bigcap \big\{ U \,\big|\, (U, \star) \text{ ist Untergruppe von } (G, \star) \text{ und } E \subseteq U \big\}$$

die von E **erzeugte Untergruppe** in $(G, \star)$.

Darstellung der erzeugten Untergruppe

Satz

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $E \subseteq G$.

Dann gilt für die von E erzeugte Untergruppe:

$$\langle E \rangle = \left\{ a_1 \star \cdots \star a_n \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \; (a_i \in E \cup E') \right\},$$

wobei E' die Menge der Inversen von E bezeichnet.

Darstellung der erzeugten Untergruppe

$$\langle E \rangle \coloneqq \bigcap \big\{ U \,\big|\, (U, \star) \text{ ist Untergruppe von } (G, \star) \text{ und } E \subseteq U \big\}$$

$$M \coloneqq \big\{ a_1 \star \cdots \star a_n \,\big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \, (a_i \in E \cup E') \big\}$$

Beweis.

Darstellung der erzeugten Untergruppe

$$\langle E \rangle \coloneqq \bigcap \big\{ U \,\big|\, (U, \star) \text{ ist Untergruppe von } (G, \star) \text{ und } E \subseteq U \big\}$$
$$M \coloneqq \big\{ a_1 \star \cdots \star a_n \,\big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \, (a_i \in E \cup E') \big\}$$

Beweis.

erzeugte Untergruppe

Beispiel

Für die Elemente von S_3

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Drehungen}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Spiegelungen}$$

gilt

von nur einem Element erzeugte Untergruppe

Definition

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe.

1. Die von $a \in G$ erzeugte Untergruppe $\langle a \rangle := \langle \{a\} \rangle$ heißt die von a erzeugte **zyklische Untergruppe** von $(G, \star)$.

2. Falls $G = \langle a \rangle$ für ein $a \in G$ gilt, so heißt $(G, \star)$ eine **zyklische Gruppe**.

von nur einem Element erzeugte Untergruppe

Beispiel

1.

2.

abkürzende Schreibweisen

Definition

Es sei $(H, \star)$ eine Halbgruppe, $a \in H$ sowie $A, B \subseteq H$.

$$\begin{aligned} a \star B &:= \{a \star b \,|\, b \in B\} \\ B \star a &:= \{b \star a \,|\, b \in B\} \\ A \star B &:= \{a \star b \,|\, a \in A,\ b \in B\} \\ A' &:= \{a' \,|\, a \in A \text{ ist invertierbar}\} \end{aligned}$$

Beispiel

Untergruppe induziert eine Äquivalenzrelation

Lemma

Es sei $(U, \star)$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \star)$. Dann gilt:

1. $a \sim^U b \;:\Leftrightarrow\; b \in a \star U$ ist eine Äquivalenzrelation.
2. Die Äquivalenzklassen sind $[a] = a \star U$.
3. Jede Äquivalenzklasse ist gleichmächtig zu U.

Beweis.

Untergruppe induziert zwei Äquivalenzrelationen

Definition

Es sei $(U, \star)$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \star)$.

$a \sim^U b \;:\Leftrightarrow\; b \in a \star U$	$a \,{}^U\!\!\sim b \;:\Leftrightarrow\; a \in U \star b$
$[a]_{\sim^U} = a \star U$ **Linksnebenklasse**	$[a]_{{}^U\!\sim} = U \star a$ **Rechtsnebenklasse**
$G \,/ \sim^U$ oder $G \,/\, U$	$G \,/\, {}^U\!\!\sim$ oder $U \backslash G$

Untergruppe induziert zwei Äquivalenzrelationen

Beispiel

Satz von Lagrange

Satz

Es sei $(G, \star)$ eine endliche Gruppe und $(U, \star)$ eine Untergruppe.

Dann gilt $\#U \mid \#G$.

Beweis. Hausaufgabe

Definition

Es seien $(H_1, \star)$ und $(H_2, \Box)$ zwei Halbgruppen.

1. Eine Abbildung $f\colon H_1 \to H_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus** von $(H_1, \star)$ in $(H_2, \Box)$, wenn gilt:

$$f(a \star b) = f(a) \Box f(b) \quad \text{für alle } a, b \in H_1.$$

2. Ist zudem $f\colon H_1 \to H_2$ bijektiv, so heißt f auch **strukturerhaltend** oder ein **Isomorphismus**.

Homomorphismus von Halbgruppen

Beispiel

1. $f\colon (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{N}, +)$ mit $f\colon n \mapsto 2\,n$
2. Es sei X eine Menge und $x_0 \in X$.
   $\Phi\colon (\mathbb{N}^X, +) \to (\mathbb{N}, +)$ mit $\Phi\colon f \mapsto f(x_0)$

Homomorphismus von Monoiden

Definition

Es seien $(M_1, \star)$ und $(M_2, \square)$ zwei Monoide.

1. Eine Abbildung $f \colon M_1 \to M_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus** von $(M_1, \star)$ in $(M_2, \square)$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(a \star b) &= f(a) \mathbin{\square} f(b) \quad \text{für alle } a, b \in M_1, \\ f(e_1) &= e_2. \end{aligned}$$

2. Ist zudem $f \colon M_1 \to M_2$ bijektiv, so heißt f auch **strukturerhaltend** oder ein **Isomorphismus**.

Homomorphismus von Monoiden

Beispiel

1. $f \colon (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{N}, +)$ mit $f \colon n \mapsto 2\,n$

2. Es sei X eine Menge und $x_0 \in X$.
   $\Phi \colon (\mathbb{N}^X, +) \to (\mathbb{N}, +)$ mit $\Phi \colon f \mapsto f(x_0)$

Homomorphismus von Gruppen

Definition

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ zwei Gruppen.

1. Eine Abbildung $f\colon G_1 \to G_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus** von $(G_1, \star)$ in $(G_2, \square)$, wenn gilt:

$$f(a \star b) = f(a) \square f(b) \quad \text{für alle } a, b \in G_1.$$

2. Ist zudem $f\colon G_1 \to G_2$ bijektiv, so heißt f auch **strukturerhaltend** oder ein **Isomorphismus**.

Homomorphismus von Gruppen

Lemma

Ein Gruppenhomomorphismus erfüllt

1. $f(e_1) = e_2$
2. $(f(a))' = f(a')$

Beweis.

Homomorphismus von Gruppen

Beispiel

1. Es sei $a > 0$, $a \neq 1$.
   $\log_a : (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$
2. $\operatorname{sgn} : (S_n, \circ) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$

Isomorphie ist Äquivalenzrelation

Lemma

Die Isomorphie von Halbgruppen bzw. von Monoiden bzw. von Gruppen ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis.

Endomorphismen und Automorphismen

Definition

1. Ein Homomorphismus von Halbgruppen bzw. von Monoiden bzw. von Gruppen heißt ein **Endomorphismus**, wenn beide Strukturen identisch sind.

2. Ein Isomorphismus von Halbgruppen bzw. von Monoiden bzw. von Gruppen heißt ein **Automorphismus**, wenn beide Strukturen identisch sind.

Bild eines Gruppenhomomorphismus

Definition

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ Gruppen.

Das **Bild** von f ist definiert als

$$\operatorname{Bild}(f) := \{f(x) \in G_2 \mid x \in G_1\} = f(G_1).$$

Lemma

$\operatorname{Bild}(f)$ ist eine Untergruppe von $(G_2, \square)$.

Beweis.

Kern eines Gruppenhomomorphismus

Definition

Es seien $(G_1, \star)$, $(G_2, \Box)$ Gruppen mit neutralen Elementen e_1 bzw. e_2.

Der **Kern** von f ist definiert als

$$\operatorname{Kern}(f) := \{x_1 \in G_1 \mid f(x) = e_2\} = f^{-1}(\{e_2\}).$$

Lemma

$\operatorname{Kern}(f)$ ist eine Untergruppe von $(G_1, \star)$.

Beweis.

Bild und Kern eines Gruppenhomomorphismus

Beispiel

1. $\operatorname{sgn}\colon (S_n, \circ) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$

2.

Injektivität eines Gruppenhomomorphismus

Lemma

Es seien $(G_1, \star)$, $(G_2, \square)$ Gruppen mit neutralen Elementen e_1 bzw. e_2. Für einen Homomorphismus $f\colon G_1 \to G_2$ sind äquivalent:

1. f ist injektiv.
2. $\operatorname{Kern}(f) = \{e_1\}$.
3. Die einzige Lösung der Gleichung $f(a) = e_2$ ist $a = e_1$.

Beweis.