Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 05

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	21	38.89%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	4	7.41%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	6	11.11%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	32	59.26%
Gesamt(Brutto)	**63**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort Ansehen	6	11.11%
Keine Antwort	16	29.63%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	32	59.26%
Gesamt(Brutto)	**54**	**100.00%**

„Gehäuftes“ Interesse an:

(1) (Zyklischer) Erzeugung und Ordnung

(2) Nebenklassen und Äquivalenzrelationen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Inhalte festigen

(2) Intuition verbessern

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick

(2) Wiederholen und Ergänzen bekannter Inhalte

(3) Arbeiten mit den Begriffen

   (1) Untergruppen und (zyklische) Erzeugung
   (2) Nebenklassen und Äquivalenzrelationen
   (3) Homomorphismen (zeitabhängig)

(4) "Nutzen"der Begriffe zeigen

Wochenüberblick

Wiederholung Untergruppen und Erzeugung

Definition

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

(1) $U \subseteq G$ **Untergruppe**, wenn $\cdot$-abgeschlossen und selbst Gruppe

(2) $E \subseteq G$, dann ist die von E **erzeugte Untergruppe**

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &:= \bigcap \big\{ U \,\big|\, (U, \cdot) \text{ ist Untergruppe von } (G, \cdot) \text{ und } E \subseteq U \big\} \\ &= \big\{ a_1 \cdot (\cdots) \cdot a_n \,\big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \, (a_i \in E \cup E') \big\}\end{aligned}$$

(3) $E \subseteq G$ **Erzeugendensystem**, wenn $\langle E \rangle = G$

(4) $a \in G$, dann ist $\langle a \rangle$ **zyklisch** erzeugte UG

(5) **Ordnung** $\operatorname{ord}(a)$ ist kleinstes $n \in \mathbb{N}$, so dass $a^n = 1$ (oder ∞)

Untergruppenstruktur in Verknüpfungstabellen

Es sei $(G, \cdot)$ eine (endliche) Gruppe und $(U, \cdot)$ eine Untergruppe mit $U = \{1, u_1, \ldots, u_k\}$. Wie ist die Verknüpfungstabelle strukturiert?

$\cdot$	1	u_1	$\ldots$	u_k	a_1	$\ldots$	a_l
1							
u_1							
$\vdots$							
u_k							
a_1							
$\vdots$							
a_l							

Untergruppen der S_3 in der Verknüpfungstabelle

Untergruppen der S_3

Siehe Vorlesungsmitschrift: $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$, $\{\sigma_0, \sigma_3\}$, $\{\sigma_0, \sigma_4\}$, $\{\sigma_0, \sigma_5\}$

$\circ$	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
e	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
d	d	d^2	e	s_3	s_1	s_2
d^2	d^2	e	d	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	d	d^2
s_2	s_2	s_3	s_1	d^2	e	d
s_3	s_3	s_1	s_2	d	d^2	e

Visualisierung zyklisch erzeugter Gruppen

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) \in \mathbb{N}$. Wie sieht $\langle a \rangle$ aus?

Wir wissen: $\langle a \rangle = \{a^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Wahr/Falsch zu Untergruppen und Erzeugung

Gilt für allgemeine $(G, \cdot)$ Gruppe, $(U, \cdot)$ Untergr., $E, F \subseteq G$, $a \in G$:

(1) $\langle \emptyset \rangle = \emptyset$

(2) Für jedes $b \in \langle a \rangle$ ist $\langle b \rangle = \langle a \rangle$

(3) Für $E \subseteq F$ ist $\langle E \rangle \subseteq \langle F \rangle$

(4) Es gibt $(U, \cdot)$ mit $\langle u \rangle = U$ für alle $u \in U$

(5) Das größte Erzeugendensystem von G ist eindeutig.

(6) Das kleinste Erzeugendensystem von G ist eindeutig.

(7) $\langle E \rangle \cup \langle G \setminus E \rangle$ ist mit $\cdot$ eine Untergruppe von G

(8) Ist G endlich erzeugt, so ist G endlich.

Primgruppen

Satz

Es sei p eine Primzahl. Dann ist jede Gruppe $(G, \cdot)$ mit Ordnung p zyklisch und es ist $\mathrm{ord}(a) = p$ und $\langle a \rangle = G$ für alle $a \in G \setminus \{1_G\}$.

Beweis:

Wiederholung Nebenklassen

Definition

Es sei $(U, \star)$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \star)$.

$a \sim^U b \;:\Leftrightarrow\; b \in a \star U$ $\qquad$ $a \, {}^U\!\!\sim b \;:\Leftrightarrow\; a \in U \star b$

$[a]_{\sim^U} = a \star U$ **Linksnebenklasse** $\qquad$ $[a]_{{}^U\!\sim} = U \star a$ **Rechtsnebenklasse**

Nebenklassen in Verknüpfungstabellen

Es sei $(G, \cdot)$ eine (endliche) Gruppe und $(U, \cdot)$ eine Untergruppe mit $U = \{1, u_1, \ldots, u_k\}$. Wo stehen die Nebenklassen?

$\cdot$	1	u_1	$\ldots$	u_k	a_1	$\ldots$	a_l
1							
u_1							
$\vdots$							
u_k							
a_1							
$\vdots$							
a_l							

Nebenklassen der S_3 in der Verknüpfungstabelle

Nebenklassen für $U = \{e, d, d^2\}$

$\circ$	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
e	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
d	d	d^2	e	s_3	s_1	s_2
d^2	d^2	e	d	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	d	d^2
s_2	s_2	s_3	s_1	d^2	e	d
s_3	s_3	s_1	s_2	d	d^2	e

Nebenklassen für $U = \{e, s_3\}$

$\circ$	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
e	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
d	d	d^2	e	s_3	s_1	s_2
d^2	d^2	e	d	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	d	d^2
s_2	s_2	s_3	s_1	d^2	e	d
s_3	s_3	s_1	s_2	d	d^2	e

True/False zu Nebenklassen

Gilt für allgemeine $(G, \cdot)$ Gruppe, $(U, \cdot)$ Untergruppe, $a, b \in G$:

(1) $a \in [a]_{\sim U}$

(2) $1 \in [a]_{\sim U}$

(3) $[a]_{\sim U}$ ist eine Untergruppe

(4) $[a]_{\sim \langle a \rangle} = \langle a \rangle$

(5) $[a]_{\sim \langle a \rangle} = [a]_{\langle a \rangle \sim}$

(6) $[a]_{\sim U} = [b]_{\sim U} \quad \Rightarrow a = b$

(7) $[a]_{\sim U} = [b]_{\sim U} \; \forall U \quad \Rightarrow a = b$

(8) $[a]_{\sim U_1} = [a]_{\sim U_2} \; \forall a \quad \Rightarrow U_1 = U_2$

Untergruppe induziert eine Äquivalenzrelation

Lemma

Es sei $(U, \star)$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \star)$. Dann gilt:

(1) $a \sim^U b \;:\Leftrightarrow\; b \in a \star U$ ist eine Äquivalenzrelation.

(2) Die Äquivalenzklassen sind $[a] = a \star U$.

(3) Jede Äquivalenzklasse ist gleichmächtig zu U.

Beweis.

Homomorphismen

Definition

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \Box)$ zwei Gruppen und $f\colon G_1 \to G_2$

(1) f **Homomorphismus**, wenn strukturverträglich
$f(a \star b) = f(a) \Box f(b)\ \forall a, b \in G_1$

(2) f **Isom.**, wenn strukturverträglich und bijektiv

(3) f **Endom.**, wenn strukturverträglich und $(G_1, \star) = (G_2, \Box)$

(4) f **Autom.**, wenn Endom. und Isom.

Direkte Konsequenzen aus der Strukturverträglichkeit

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \Box)$, $U_1 \subseteq G_1$, $U_2 \subseteq G_2$ Untergruppen, $E \subseteq G_1$, $a \in G_1$ und $f\colon G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus.

(1) $f(a^n) = f(a)^n$

(2) $(f(a))^{-1} = f\left(a^{-1}\right)$

(3) $f(\langle E \rangle) = \langle f(E) \rangle$

(4) $(U_1, \star)$ Untergruppe $\Rightarrow$ $f(U_1)$ ist Untergruppe

(5) $(U_2, \Box)$ Untergruppe $\Rightarrow$ $f^{-1}(U_2)$ ist Untergruppe

Primgruppen 2

Satz

Es sei p eine Primzahl. Dann ist jede Gruppe $(G, \cdot)$ mit Ordnung p isomorph zu $(Z_p, +_p)$.

Beweis: