Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 04

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	10	30.30%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	3	9.09%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	8	24.24%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	19	57.58%
Gesamt(Brutto)	**40**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	0	0.00%
Keine Antwort	14	42.42%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	19	57.58%
Gesamt(Brutto)	**33**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Translation und Gruppenkriterium

(2) Symmetrische Gruppe

(3) Formale Beweise bei Gruppen

(4) Modulo und Restklassen

(5) Vererbung punktweiser Eigenschaften auf Funktionen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Bedeutung Gruppen- und Sudokukriterium klären
(2) Verständnis der symmetrischen Gruppe verbessern
(3) Implikationen von Nichtkommutativität für Gruppenordnung klären

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick
(2) Aufwärmen: Die Gruppe $(\mathbb{R}^X, +)$
(3) Wiederholung und Anwendung Translationsgruppenkriterium
(4) Untersuchen der kleinsten algebraischen Strukturen
(5) Arbeiten mit der S_n

Wochenüberblick

Gruppeneigenschaft von $(\mathbb{R}^X, +)$ (Beispiel 7.16 **??**)

Satz

Für X nichtleer ist $(\mathbb{R}^X, +)$ ist eine Gruppe.

Beweis: Per Def. ist $\mathbb{R}^X = \{f \mid f : X \to \mathbb{R}\}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Wiederholung Translationsgruppenkriterium

Lemma (Gruppenkriterium mit Rechts- und Linkstranslationen)

(1) Ist $(G, \star)$ eine Gruppe und ist $a \in G$ beliebig, so sind die Rechts- und Linkstranslation $\star_a$ und ${}_a\star$ bijektive Abbildungen $G \to G$.

(2) Ist $(H, \star)$ eine nichtleere Halbgruppe und gilt für alle $a \in H$, dass die Rechts- und Linkstranslationen $\star_a$ und ${}_a\star$ surjektive Abbildungen sind, dann ist $(H, \star)$ eine Gruppe.

Satz

Jede Gruppe mit Ordnung 4 ist abelsch.

Beweis: Wir bezeichnen die 4 Elemente der Gruppe mit e, a, b und c.

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b			
c	c			

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b			
c	c			

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b			
c	c			

Kleinste algebraische Strukturen

Wieviele Elemente hat eigentlich die/das kleinste...

(1) Halbgruppe

(2) Monoid

(3) Gruppe

(4) nicht-abelsche Gruppe

Kleinste nicht-abelsche Gruppen

Satz

Die kleinste nicht-abelsche Gruppe hat Ordnung

Kleinste nicht-abelsche Gruppen cont.

Kommutativität in S_n

Satz

S_n ist genau dann abelsch, wenn $n \in \{1, 2\}$.

Darstellungen von Permutationen aus S_n

Definition

Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $S(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$.
Dann heißt $(S(X), \circ)$ die **symmetrische Gruppe** auf X. $S_n := S(\llbracket 1, n \rrbracket)$

Zweizeilenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Tupelform:

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Zyklenform:

$$(x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{l_x - 1}(x)), \ldots, (y, \sigma(y), \ldots, \sigma^{l_y - 1}(y))$$

(Un-)eindeutigkeit der Transpositionszerlegungen

In Zweizeilenform:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

In Zyklusform:

$$\sigma = (123)$$

Bestimmen des Signums

Möglichkeit 1:

Möglichkeit 2:

Möglichkeit 3:

Möglichkeit 4:

Bonus - Über Linkseigenschaften zu Gruppen.

Satz

Wenn in einer Halbgruppe $(H, \star)$ ein Element e_ℓ linksneutral ist & jedes Element bzgl. e_ℓ linksinvertierbar ist, dann ist $(H, \star)$ eine Gruppe.