Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 04

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	10	30.30%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	3	9.09%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	8	24.24%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	19	57.58%
Gesamt(Brutto)	**40**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	0	0.00%
Keine Antwort	14	42.42%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	19	57.58%
Gesamt(Brutto)	**33**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Translation und Gruppenkriterium

(2) Symmetrische Gruppe

(3) Formale Beweise bei Gruppen

(4) Modulo und Restklassen

(5) Vererbung punktweiser Eigenschaften auf Funktionen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Bedeutung Gruppen- und Sudokukriterium klären

(2) Verständnis der symmetrischen Gruppe verbessern

(3) Implikationen von Nichtkommutativität für Gruppenordnung klären

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick

(2) Aufwärmen: Die Gruppe $(\mathbb{R}^X, +)$

(3) Wiederholung und Anwendung Translationsgruppenkriterium

(4) Untersuchen der kleinsten algebraischen Strukturen

(5) Arbeiten mit der S_n

Wochenüberblick

Mengen, Relationen

Funktionen
$f: X \to Y$

Spezielle Def/Zielbereich

(Innere) Verknüpfungen
$*: X \times X \to X$

Assoziativität

Kommutativität

notwendig

optional (abelsch)

Halbgruppen $(H,*)$

Neutrales Element

Translationen

Monoide $(H,*)$ (mit e)

Invertierbarkeit

Einheitengruppe

Gruppe $(G,*)$ (mit e)

Kürzungsregeln

Gruppenkriterium

Symmetrische Gruppe $S(X) := \{f: X \to X \mid f \text{ bijektiv}\}$

$S_n := S([\![1,n]\!])$ | Permutationen, Fehlstände, Transpositionen, Signum

Satz

Für X nichtleer ist $(\mathbb{R}^X, +)$ ist eine Gruppe.

(ℝ nicht ausschlaggebend) Y^X mit $*: X \times X \to X$

Beweis: Per Def. ist $\mathbb{R}^X = \{f \mid f: X \to \mathbb{R}\}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Basis: $f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x)\ \forall x \in X$

1. $\mathbb{R}^X$ ist nichtleere Menge
2. "+" ist Verknüpfung, denn für $f, g \in \mathbb{R}^X$ ist $x \mapsto f(x) + g(x)$ auch in $\mathbb{R}^X$ "Abgeschlossenheit"
3. "+": $\mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$ erbt die Assoziativität von $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denn gilt: $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)\ \forall x \in X$ $\overset{1,2,3}{\Rightarrow} (\mathbb{R}^X, +)$ Halbgruppe
4. $(\mathbb{R}^X, +)$ besitzt die konstante Nullfunktion 0 als neutrales Element $\overset{1-4}{\Rightarrow} (\mathbb{R}^X, +)$ und 0 ist Monoid
5. Bzgl. "+": $\mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$ ist jedes $f \in \mathbb{R}^X$ invertierbar mit $f' = -f$, denn $(f + f')(x) = (f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\square$

Wiederholung Translationsgruppenkriterium

Lemma (Gruppenkriterium mit Rechts- und Linkstranslationen)

(1) Ist $(G, \star)$ eine Gruppe und ist $a \in G$ beliebig, so sind die Rechts- und Linkstranslation $\star_a$ und ${}_a\star$ bijektive Abbildungen $G \to G$.

(2) Ist $(H, \star)$ eine nichtleere Halbgruppe und gilt für alle $a \in H$, dass die Rechts- und Linkstranslationen $\star_a$ und ${}_a\star$ surjektive Abbildungen sind, dann ist $(H, \star)$ eine Gruppe. $\Rightarrow$ Dann auch ${}_a\star$, $\star_a$ injektiv.

Alternative zu 4.18.:

1, 2, 3 $\Rightarrow (\mathbb{R}^+, +)$ Halbgruppe, Kommutativität wird vererbt. $a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow {}_a\star = \star_a$

Für beliebiges $f \in \mathbb{R}^+$ ist $(f-a) \in \mathbb{R}^+$

und

$${}_a\star(f-a) = \cancel{a} + (f \cancel{-a}) = f \quad \Rightarrow {}_a\star = \star_a \text{ surjektiv}$$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^+, +)$ Gruppe

Anwendung des Translationskrit. (Hausaufgabe 4.4 (*ii*))

Satz

Jede Gruppe mit Ordnung 4 ist abelsch.

Beweis: Wir bezeichnen die 4 Elemente der Gruppe mit e, a, b und c.

Gruppe $\Rightarrow$ Translationen surjektiv $\Rightarrow$ Jede Zeile und Spalte beinhalten e, a, b, c

$\Rightarrow$ Symmetrie ist Not/Hin Krit. für Gruppeneigen

$\star e$

$e\star \rightarrow$

$a\star \rightarrow$

$b\star \rightarrow$

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	x		
b	b			
c	c			

$x \in \{e, b, c\}$

$x = e$

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	e		
c	c	b		

$\begin{pmatrix} e & a \\ a & e \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Symmetrie $\begin{pmatrix} a & e \\ e & a \end{pmatrix}$

$x = b$ ($x = c$ analog)

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

(symmetrisch)

Tabellensym. $\Rightarrow$ abelsch

Kleinste algebraische Strukturen

Wieviele Elemente hat eigentlich die/das kleinste...

(1) Halbgruppe

0 Elemente $\emptyset$ mit der einzigen Verknüpfung $*: \emptyset \times \emptyset \to \emptyset$

(2) Monoid

1 Element $\{e\}$ mit einziger Verknüpfung $*: \{e\} \times \{e\} \to e$

(3) Gruppe

Siehe (2)

(4) nicht-abelsche Gruppe

Hm 5, siehe HA 4.4, Ab 6 El. siehe Beispiel S_3 (Skript)

Kleinste nicht-abelsche Gruppen

Satz

Die kleinste nicht-abelsche Gruppe hat Ordnung 6.

Beweis Gruppe $(G,\cdot)$ beinhaltet e, also $\{e\} \subseteq G$ $\Rightarrow \#G \geq 1$

e kommutiert aber mit allen Elementen $\Rightarrow \exists a, b, a \neq b : \{e, a, b\} \subseteq G$

$e \neq a \neq b$, $a \cdot b \neq b \cdot a$ $\Rightarrow \# \geq 3$

Da Inverse immer kommutieren ist $a \cdot b \neq e \neq b \cdot a$

Wegen der Kürzungsregel ist $a \cdot b \neq a$, $a \cdot b \neq b \Rightarrow \{e, a, b, a \cdot b, b \cdot a\} \subseteq G \Rightarrow \#G \geq 5$

Bleibt zu zeigen, dass es hier noch ein weiteres Element geben muss nämlich $a \cdot a$ oder $a \cdot b \cdot a \in G$

Kleinste nicht-abelsche Gruppen cont.

Z: $a \cdot a \notin \{e, a, b, a \cdot b, b \cdot a\}$ oder $a \cdot b \cdot a \notin \{ \ldots \}$

- $a \cdot a \notin \{a \cdot b, b \cdot a, a\}$, weil sonst wegen der Kürzungsregeln $a = b$ oder $a = e$.

  $a \cdot a \neq b$, weil sonst $a \cdot b = a \cdot a \cdot a = b \cdot a$, also würden a, b kommutieren. $\Rightarrow a \cdot a = e$ (1) oder $a \cdot a \notin \{e, a, b, a \cdot b, b \cdot a\}$

- $a \cdot b \cdot a \notin \{a \cdot b, b \cdot a, a\}$ wegen der Kürzungsregeln

  $a \cdot b a \neq e$ weil sonst $b \cdot a = a^{-1} = a \cdot b$, also würden a, b kommutieren

$\Rightarrow a \cdot b \cdot a \neq b$ weil sonst wegen (1) $a \cdot b = b \cdot a$ (a von links ranhängen)

$\Rightarrow a \cdot b \cdot a \notin \{e, a, b, a \cdot b, b \cdot a\} \Rightarrow$ Min. 6. Elemente und S_3 ist nicht abelsch mit $\# S_3 = 6$ $\blacksquare$

Satz

S_n ist genau dann abelsch, wenn $n \in \{1, 2\}$.

Beweis: $n \in \{1,2\}$: S_n hat $n!$ Elemente $1! = 1$, $2! = 2$

$\Rightarrow$ (HA 4.4) Abelsch

$n = 3$: $\sigma_4 \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2$

$\sigma_3 \circ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1$

S_3 nicht abelsch.

$n > 3$: Nicht abelsch wegen Injektion $I : S_3 \to S_n \; (n > 3)$

$\sigma \mapsto \left(i \mapsto \begin{cases} \sigma(i), & i \leq 3 \\ i, & 3 < i \leq n \end{cases} \right)$

Injektivität

$I(\sigma_4) \circ I(\sigma_3) = I(\sigma_4 \circ \sigma_3) \neq I(\sigma_3 \circ \sigma_4) = I(\sigma_3) \circ I(\sigma_4)$

Darstellungen von Permutationen aus S_n

Definition

Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $S(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$.
Dann heißt $(S(X), \circ)$ die **symmetrische Gruppe** auf X. $S_n := S([\![1, n]\!])$

Zweizeilenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Bspl.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Tupelform:

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$(3\ 1\ 2\ 5\ 4)$$

Zyklenform:

y nicht hier drin

Disjunkte Zyklen kommutieren

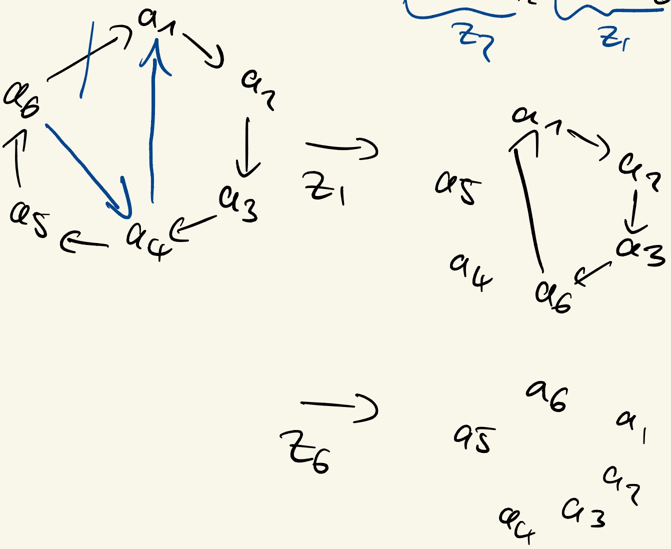
$$(x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{l_x - 1}(x))_z, \ldots, (y, \sigma(y), \ldots, \sigma^{l_y - 1}(y))_z$$

$$(1, 3, 2)_z \qquad (4\ 5)_z$$

$$(1\ 3\ 2)_z (4\ 5)_z = (1\ 3)_z (3\ 2)_z (4\ 5)_z$$

$$\sigma = (a_1 \ldots a_d \ldots a_l)_z = (a_1 \ldots a_d)_z (a_d \ldots a_l)_z$$

$$(a_1, \ldots, a_4, \ldots a_6)_z = \underbrace{(a_1 \ldots a_4)_z}_{z_2} \underbrace{(a_4 \ldots a_6)_z}_{z_1}$$



(Un-)eindeutigkeit der Transpositionszerlegungen

Korrekturen unten in Orange

In Zweizeilenform:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(ÜA) Sortieren von links

$$\sigma = \tau(1,2) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \tau(1,2) \circ \tau(2,3) \circ \mathrm{id}$$

(VL) von rechts

$$= \tau(1,3) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \tau(1,3) \circ \tau(1,2) \circ \mathrm{id}$$

In Zyklusform:

$$\sigma = (123)_z$$

$$\sigma = (123)_z = (12)_z (23)_z$$

$$\sigma = (123)_z = (3\,12)_z = (31)_z (12)_z$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sortieren von Links

Tausch im Bildbereich

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \tau(1,2) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \tau(1,2) \circ \tau(2,3) \circ id$$

Tausch im Definitionsbereich

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \tau(1,3)$$

$$= id \circ \tau(2,3) \circ \tau(1,3)$$

Sortieren von Rechts

Tausch im Bildbereich:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \tau(1,3) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \tau(1,3) \circ \tau(1,2) \circ id$$

Tausch im Definitionsbereich

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \tau(2,3)$$

$$= id \circ \tau(1,2) \circ \tau(2,3)$$

Bestimmen des Signums

Möglichkeit 1: Definition

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \in \{-1, 1\}$$

$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Faktoren

$\cdot$ 2 Differenzen

$\cdot$ 1 Quotient

Möglichkeit 2: Fehlstände

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\#\text{Fehlstände}}$$

Möglichkeit 3: Transpositionen

$$\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{\#\text{Transpositionen}}$$

Möglichkeit 4: Zykel

$$\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{(n - \#\text{Zykel})}$$

Minimale Anzahl nötige Transpositionen