Lineare Algebra I

Woche 03

31.10.2023 und 02.11.2023

Abbildung/Funktion

Definition

Eine Relation (R, X, Y) zwischen X und Y heißt

- **linkstotal**, falls für alle $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert, sodass $x \mathrel{R} y$ gilt.
- **rechtseindeutig**, falls für alle $x \in X$ und alle $y_1, y_2 \in Y$ gilt: $x \mathrel{R} y_1 \wedge x \mathrel{R} y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$.

Eine solche Relation (f, X, Y) heißt **Abbildung von X in Y** oder **Funktion von X in Y**.

- X heißt der **Definitionsbereich** oder die **Definitionsmenge**.
- Y heißt die **Zielmenge** von f.

Der **Graph** der Funktion $f \colon X \to Y$ ist

$$\big\{(x, f(x)) \,\big|\, x \in X\big\} \subseteq X \times Y.$$

Notation von Funktionen

Funktion

Beispiel

1. Die **konstante Funktion** auf X mit dem Wert y_0 ist

$$X \ni x \mapsto f(x) := y_0 \in Y.$$

2. Für Mengen $X \subseteq Y$ heißt die Abbildung $i_{X \to Y}$ mit

$$X \ni x \mapsto i_{X \to Y}(x) := x$$

die **kanonische Einbettung** von X in Y.

3. Für eine Menge X heißt die Abbildung id_X mit

$$X \ni x \mapsto \mathrm{id}_X(x) := x$$

die **identische Abbildung** von X.

Bildmenge

Definition

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

Für $A \subseteq X$ heißt

$$f(A) := \{f(x) \,|\, x \in A\}$$

die **Bildmenge** von f **auf** A oder das **Bild** von A **unter** f.

Einschränkung, Fortsetzung

Definition

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

Für $A \subseteq X$ heißt die Funktion $f|_A$

$$A \ni x \mapsto f|_A(x) := f(x) \in Y$$

die **Einschränkung** oder **Restriktion** von f auf A.

Gilt $f(A) \subseteq B$, so ist $f|_A^B$ die Einschränkung von f auf A, wobei zusätzlich die Zielmenge durch B ersetzt wird:

$$A \ni x \mapsto f|_A^B(x) := f(x) \in B.$$

Urbild

Definition

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

Für $B \subseteq Y$ heißt die Menge

$$f^{-1}(B) \coloneqq \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

das **Urbild** von B **unter** f.

Bilder, Urbilder von Vereinigungen und Schnitten

Satz

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Weiter seien $\{X_i \mid i \in I\}$ bzw. $\{Y_j \mid j \in J\}$ eine Menge von Teilmengen von X bzw. Y. Dann gilt:

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(X_i) \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i)$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j) \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$$

Beweis.

Surjektivität

Definition

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt **surjektiv**, wenn $f(X) = Y$ gilt.

Injektivität

Definition

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt **injektiv**, wenn für $x_1, x_2 \in X$ gilt:
$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$.

Bijektivität

Definition

Eine Funktion $f \colon X \to Y$ heißt **bijektiv**, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

Surjektivität, Injektivät, Bijektivität

Beispiel

Komposition

Definition

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen.

Die Funktion

$$X \ni x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \in Z$$

heißt die **Komposition** von f und g.

Beispiel

Komposition injektiver und surjektiver Funktionen

Lemma

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen.

1. Sind f und g beide injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
2. Sind f und g beide surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
3. Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
4. Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

Beweis.

Komposition zur Identität

Folgerung

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen.

Wenn $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ist, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Beweis.

Umkehrfunktion

Definition

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

f heißt **invertierbar**, wenn es eine Funktion $g\colon Y \to X$ gibt mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

In diesem Fall heißt g die **Umkehrfunktion** zu f.

Beispiel

Umkehrfunktion der Komposition

Satz

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ bijektive Funktionen.

Dann ist auch $g \circ f$ bijektiv, und die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Beweis.

Charakterisierung der Injektivität

Lemma (Beweis im Skript)

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $X \neq \emptyset$.

Dann sind äquivalent:

1. f ist injektiv.
2. Es existiert eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit der Eigenschaft
$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Eine solche Abbildung heißt eine **Linksinverse** von f. Sie ist notwendig surjektiv. Ihre Einschränkung $g|_{f(X)}$ auf das Bild von f ist eindeutig.

Gibt es eine entsprechende Charakterisierung auch für die Surjektivität?

Gleichmächtigkeit von Mengen

Definition

Zwei Mengen X und Y heißen **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$ gibt. Wir schreiben in diesem Fall $X \sim Y$.

- Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.
- Die Äquivalenzklassen heißen **Kardinalzahlen**.

Endlichkeit, Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit

Definition

Eine Menge X heißt

- **endlich**, wenn $X \sim [\![1, n]\!]$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
  Die Zahl n heißt dann die **Mächtigkeit** oder **Kardinalität** von X.
  Wir schreiben: $\#X = n$.
- **unendlich**, wenn X nicht endlich ist.
- **abzählbar unendlich**, wenn $X \sim \mathbb{N}$ gilt.
- **abzählbar**, wenn X entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.
- **überabzählbar**, wenn X nicht abzählbar ist.

Endlichkeit, Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit

Beispiel

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität für endliche Mengen

Satz

Es seien X und Y endliche, gleichmächtige Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

1. f ist injektiv.
2. f ist surjektiv.
3. f ist bijektiv.

Vergleich von Mächtigkeiten

Definition

Es seien X und Y Mengen.

X ist **höchstens gleichmächtig** zu Y, wenn es eine bijektive Abbildung von X auf eine Teilmenge von Y gibt. Wir schreiben in diesem Fall $X \lesssim Y$.

Das ist eine Ordnungsrelation auf der Klasse aller Mengen.

- Reflexivität:
- Transitivität:
- Antisymmetrie: Satz von Cantor-Bernstein-Schröder

Familie von Elementen

Definition

Es seien I und Y Mengen.

1. Eine Abbildung
$$I \ni i \mapsto y(i) := y_i \in Y$$
heißt eine **Familie von Elementen** aus Y mit der **Indexmenge** I. Kurz wird diese auch mit $(y_i)_{i \in I}$ bezeichnet.
2. Ist $I_0 \subseteq I$, dann heißt $(y_i)_{i \in I_0}$ eine **Teilfamilie** von $(y_i)_{i \in I}$, und $(y_i)_{i \in I}$ heißt eine **Oberfamilie** von $(y_i)_{i \in I_0}$.

Folge

Definition

Es seien I und Y Mengen.

3. Ist I abzählbar unendlich (also $I \sim \mathbb{N}$), so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **abzählbar unendliche Familie**.

   Ist speziell $I = \mathbb{N}$ oder allgemeiner $I = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0\}$ mit einem Startindex $n_0 \in \mathbb{Z}$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **Folge** in Y.

4. Ist I endlich, gilt also $I \sim [\![1, n]\!]$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **endliche Familie**.

   Ist speziell $I = [\![1, n]\!]$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **endliche Folge** in Y.

Kartesisches Produkt allgemein

Bisher hatten wir das **kartesische Produkt** von endlich vielen Mengen $A_1, \dots, A_n$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert:

$$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i := \Big\{ \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{n\text{-}\textbf{Tupel}} \,\Big|\, a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \dots, n \Big\}$$

Definition

Allgemein ist das **kartesische Produkt** einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Mengen mit $I \neq \emptyset$ definiert durch

$$\bigtimes_{i \in I} A_i := \Big\{ \underbrace{F \colon I \to \bigcup_{i=I} A_i}_{\text{Funktion}} \,\Big|\, F(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \Big\}$$

Potenznotation von Funktionen

Definition

Es seien X und Y Mengen. Dann bezeichnet

$$Y^X := \{F \mid F\colon X \to Y \text{ ist Funktion}\}.$$

Beispiel

Auswahlaxiom

Kann man Elemente des kartesischen Produkts

$$\bigtimes_{i \in I} A_i := \Big\{ \underbrace{F \colon I \to \bigcup_{i = I} A_i}_{\text{Funktion}} \;\Big|\; F(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \Big\}$$

einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Mengen überhaupt angeben?

Definition (Auswahlaxiom)

Ist $\mathcal{U}$ eine Menge von nichtleeren Mengen, dann gibt es eine Funktion $F \colon \mathcal{U} \to \bigcup \mathcal{U}$, sodass gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U} \; \big(F(U) \in U \big).$$

Eine solche Funktion F heißt **Auswahlfunktion** für $\mathcal{U}$, weil sie aus jedem Element U von $\mathcal{U}$ irgendein Element auswählt.

Auswirkungen des Auswahlaxioms

Satz

Folgende Aussagen sind in der Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel äquivalent:

1. Es gilt das Auswahlaxiom.
2. Ist I eine beliebige Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen, so ist das kartesische Produkt $\bigtimes_{i \in I} A_i$ nichtleer.
3. Jede Äquivalenzrelation besitzt ein vollständiges Repräsentantensystem.
4. Es sei $f \colon X \to Y$ eine beliebige Funktion. Dann sind äquivalent:
   1. f ist surjektiv.
   2. Es existiert eine Abbildung $h \colon Y \to X$ mit der Eigenschaft $f \circ h = \mathrm{id}_Y$. Eine solche Abbildung heißt eine **Rechtsinverse** von f. Sie ist notwendig injektiv.
5. Es gilt das Lemma von Zorn.

Lemma von Zorn

Lemma

Es sei X mit der Relation $\preccurlyeq$ eine halbgeordnete Menge.

Weiter besitze jede totalgeordnete Teilmenge $A \subseteq X$ eine obere Schranke in X.

Dann existiert in X ein maximales Element.

- Das Lemma von Zorn ist äquivalent zum Auswahlaxiom.
- Wir werden in der Vorlesung darauf hinweisen, wo Resultate vom Auswahlaxiom bzw. vom Lemma von Zorn abhängen.