Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 03

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	22	24.18%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	2	2.20%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	9	9.89%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	68	74.73%
Gesamt(Brutto)	**101**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	2	2.20%
Keine Antwort	21	23.08%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	68	74.73%
Gesamt(Brutto)	**91**	**100.00%**

Gehäuftes Interesse an Skriptinhalten:

(1) Mächtigkeit

(2) Familien

(3) Kartesische Produkte

(4) Auswahlaxiom(e)

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen

(2) Intuition zu Mengenmächtigkeit verbessern

(3) Kartesischen Produkte und „Auswahl“ miteinander verknüpfen

(4) Abbildungen von homogene Relationen abgrenzen

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick

(2) True/False für Aussagen zu Mächtigkeit

(3) Kurzvortrag zu kartesischen Produkten und Auswahl(-axiomen)

(4) Aufgaben von Abbildungen und homogene Relationen vergleichen

Wochenüberblick

Mengen

Relationen (R, X, Y)

Homogenität
Reflexiv, ...

Ordnungs- und Äquivalenzrel.
(Extremalkonzepte, Äquivalenzklassen)

Linkstotalität
Rechtseindeutigkeit

Abbildungen/Funktionen $f: X \to Y$

- Bild $f(\cdot)$
- Urbild $f^{-1}(\cdot)$

Induzierte Zusammenhänge zwischen $\mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{P}(Y)$

- Komposition
- Injektivität
- Surjektivität
- Bijektivität/Invertierbarkeit

Familien/Folgen

"Auswahl"/Auswahlfunktionen
Kartesische Produkt 2.0

"höchstens gleichmächtig" liefert Ordnungsrelation

Mengenmächtigkeit "$\cong$"

Endlichkeit
Abz. Unendlichkeit
Überabzählbarkeit
Gleichmächtigkeit

True/False zu Mächtigkeit von Mengen X, Y

(Unter welchen Bedingungen) gelten folgende Aussagen?

(1) Für $X \subseteq Y$ ist X höchstens so mächtig wie Y.

Wahr $\mathrm{Id}: X \to X \subseteq Y$ Bijektion

(2) Für $X \subsetneq Y$ ist X nie so mächtig wie Y.

Stichwort: Dedekind unendl.

Gilt für endliche Mengen. $2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$ aber $2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to \frac{n}{2}$, Jedes offene Intervall aus $\mathbb{R}$

(3) X und $\mathcal{P}(X)$ sind gleichmächtig.

Falsch. Satz von Cantor. Es gibt keine Surjektionen von X nach $\mathcal{P}(X)$ $\{x \mid x \notin f(x)\}$

(4) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert eine Partition $\mathcal{U}$ von $\mathbb{N}$ mit $\#(\mathcal{U}) = m$.

Wahr $\{1, \dots, m\} \ni n \mapsto [n]_{\equiv_m}$ Bijektion und $\{[n] \mid n \in \mathbb{N}\} = \{[0], \dots, [m-1]\}$

(5) Es gilt $\#(X \cup Y) = (\#X) + (\#Y)$.

Wahr für endliche disjunkte Mengen (Zusammenstückeln von Bijektionen)

(6) Alle überabzählbaren Mengen sind gleichmächtig.

Falsch Siehe (3) für $\mathbb{R}$

(7) Die geraden Zahlen sind zu den ganzen Zahlen gleichmächtig

Wahr, beide sind abz. unendlich. (Komposition von Bijektionen)

Hausaufgabe 3.4

Satz

Es seien X überabzählbar und $Y \subseteq X$ abzählbar unendlich, dann sind X und $X \setminus Y$ gleichmächtig.

Skizze: Schritt 1: $X \setminus Y$ überabzählbar (Widerspruchsbeweis, siehe 3.3(iii))

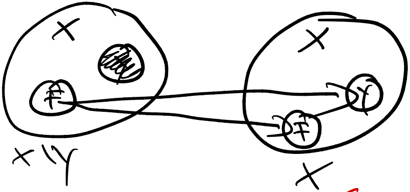
Schritt 2: $\exists F \subset X \setminus Y$ mit F abzählbar unendlich (Auswahlaxiom)

$$\forall n \; \exists (x_1, \dots, x_n) : x_i = x_j \Leftrightarrow i = j$$

Auswahl $\Rightarrow$

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_i = x_j \Leftrightarrow i = j$$

Schritt 3:



Bijektion
- Id auf $(X \setminus Y) \setminus F$
- Bijektion zwischen F und $F \dot\cup Y$ ← abwechselnd Elemente aus Y und F auswählen

f

Mengen und Familien

Mengen

- Formalisieren das Zusammenfassen von Objekten zu Verbänden.
  Elemente Mengen
- sind über ihre Elemente bestimmt. Keine doppelten Elemente.

Es gibt keine "Stellen" $\{1,2,3\} = \{\underbrace{2,3}_{\text{Stellen, Reihenfolge?}},1\} = \{\underbrace{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 3}_{\text{konsistente Schreibweise}}\}$

Familien für Indexmengen I und Zielmenge Y ($I = \mathbb{N} \Rightarrow$ Folge)

- Formalisieren das Zusammenfassen von Objekten und den Stellen, an denen sie zu finden sind. $I \ni \underset{\text{Stelle}}{i} \longmapsto \underset{\text{Objekt an Stelle}}{y_i} \in Y \quad \hat{=} \ (y_i)_{i \in I}$
- Ist I geordnet, dann gibt $(y_i)_{i \in I}$ eine induzierte Ordnung (Reihenfolge)

Auswahl und Auswahlfunktion

Was ist eigentlich eine „Auswahl“?

Eine Zuordnung eines Index i aus einer Indexmenge I zu genau einem Element einer Menge A_i aus einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Mengen.

Hintergrund: Für eine Menge A: (A, a) für $a \in A$ eine Auswahl

Menge aus der gewählt wird

ausgewählte Objekt

Kann durch i ersetzt werden

Für eine Menge A_i aus $(A_i)_{i\in I}$: (A_i, a_i) für $a_i \in A_i$ eine Auswahl (i, a_i)

Was ist eigentlich eine „Auswahlfunktion“?

Eine Zuordnung aller Indizes i aus einer Indexmenge I zu jeweils genau einem Element einer Menge A_i aus einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Mengen.

$\{(i, a_i) \mid a_i \in A_i, i \in I\}$ sodass jedes $i \in I$ genau einmal vorkommt

$\hat{=}$ $F: I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ sodass $\underbrace{F(i)}_{a_i} \in A_i$

Kartesische Produkte sind Mengen von Auswahlfunktionen

Definition 4.8 $I = \{1, \dots, n\}$

Für endlich viele Mengen A_i, $i = 1, \dots, n$ ist

$$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i := \{(\overset{F(1)}{a_1}, a_2, \dots, \overset{F(n)}{a_n}) \mid a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

$$\hat{=} \left\{F : \{1, \dots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid F(i) \in A_i \ \forall i \in I\right\}$$

Menge der endlichen Auswahlfunktionen

Definition 6.32

Für eine beliebige Indexmenge I und eine Familie von Mengen $(A_i)_{i \in I}$ ist

$$\bigtimes_{i \in I} A_i := \left\{ \underbrace{F : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; F(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I}_{\text{Menge der Auswahlfunktionen bzg } I, (A_i)_{i \in I}} \right\}$$

(1) Ohne Definition 4.8 keine Definition 6.32!

6.32 braucht Funktionen, dh Relationen, d.h. Paare, d.h. Def 4.8

(2) Für endliche I stimmt Definition 6.32 mit Definition 4.8 überein.

Bzw für $I = \{1, \dots, n\}$

Die Rolle von Auswahlaxiomen

Wir wollen Elemente „wählen“ bzw. ihre Existenz nutzen.

Wie weit bringt uns das Induktionsprinzip?

Mit dem IP können wir für endliche Familien endliche Auswahlen angeben.

Auswahlaxiome

Die Brücke vom "beliebig endlich" zu "unendlich"

Wenn I nicht endlich ist können wir die Existenz einer Auswahlfkt. in ZF nicht beweisen. Möglichkeiten:

1. Akzeptieren, Modell (ZF) beibehalten, Eingeschränkte Resultate

2. Erweitern (ZF) um Auswahlaxiom(e) (ZFC)

verschiedene Stärken

Auswahlaxiome in Beweisen

Theorem 6.34

Das Auswahlaxiom ist äquivalent zur Rechtsinvertierbarkeit surjektiver Funktionen.

$\Rightarrow$: Es seien X, Y Mengen und $f: X \to Y$ surjektiv.

$X = Y = \emptyset$ ist f selbstinvers. Sonst $Y \neq \emptyset$

$\overset{\text{surj.}}{\Rightarrow}$ $\underbrace{f^{-1}(\{y\})}_{\in \mathcal{P}(X)}$ nicht leer für alle $y \in Y$, also ist $(f^{-1}(\{y\}))_{y \in Y}$

Familie nichtleere Mengen aus $\mathcal{P}(X)$. Auswahlaxiom liefert

$$g: Y \to \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}) = X \quad \text{mit } g(y) \in f^{-1}(\{y\}) \; \forall y$$

Indexmenge; nichtstabil; also

$\Rightarrow f(g(y)) = y \Rightarrow g$ Rechtsinverse. $\square$

Für endliche Y ohne Auswahlaxiom möglich!

Potenznotation

Ist $A_i = A$ für alle $i \in I$, dann schreiben wir statt $\bigtimes_{i \in I} A$ auch A^I.

Beispiel 1: Was ist eigentlich $\emptyset^\emptyset$?

$$\emptyset^\emptyset = \bigtimes_{i\in\emptyset} \emptyset = \{ F : \emptyset \to \underbrace{\bigcup_{i\in\emptyset} \emptyset}_{\emptyset} \mid F(i) \in \emptyset \ \forall i \in \emptyset \}$$

$$= \{ F : \emptyset \to \emptyset \}$$

$$= \{ \emptyset \}$$

Beispiel 2: Was hat $\{0,1\}^X$ mit $\mathcal{P}(X)$ zu tun?

Es gibt eine Bijektion (Identifikation) zwischen $\{0,1\}^X$ und $\mathcal{P}(X)$

$$F : \quad (f : X \to \{0,1\}) \longmapsto \underbrace{\{x \in X \mid f(x) = 1\}}_{A \in \mathcal{P}(X)} = f^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{P}(X)$$

$$F^{-1} : \quad A \in \mathcal{P}(X) \longmapsto f : X \to \{0,1\},\ f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Kann/sollte man Abbildungen als hom. Relationen auffassen?

Kann man...? Ja, falls $X=Y$ also $f: X \to X$

Abbildung:

Relation (f, X, Y) die

- linkstotal
- rechtseindeutig

} zusätzliche Einschr.

ist

Homogene Relation:

Relation (R, X, Y) wenn $X=Y$

Sollte man...? Nein, die Konstruktionen haben unterschiedliche Aufg.

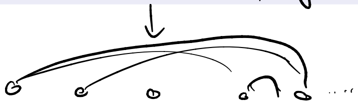
Vertragen sich die Begriffe überhaupt?

Abbildung + $\begin{cases} \text{Reflexiv}: \forall x: f(x)=x & \text{(Nur v.d. Identität erfüllt)} \\ \text{Symmetrisch}: \forall x,y\ f(x)=y \Rightarrow f(y)=x & \text{(Nur paarw. Tausch von Elementen)} \\ \text{Antisymmetrisch}: f(x)=y \wedge f(y)=x \Rightarrow x=y & \text{(Das schränkt nicht stark ein)} \\ \text{Transitiv}: f(x)=y \wedge f(y)=z \Rightarrow f(x)=z & \text{(Konstante Funktionen)} \\ \text{Total}: \forall x,y: f(x)=y \vee f(y)=x & \text{(Nur bis max 2 Elemente in } X\text{)} \end{cases}$

Die Aufgaben von homogenen Relationen und Abbildungen

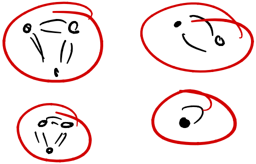
Aufgaben von Ordnungs- bzw. Äquivalenzrelationen

OR: Ordnen, Sortieren, Vergleichen



Kleiner/Größer

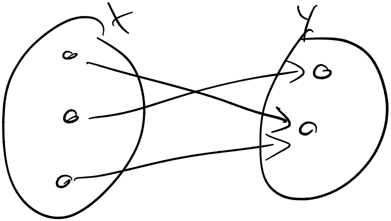
ÄR: Identifizieren, In Klassen fassen



Äquivalent

Aufgaben von Abbildungen

Zuordnen („Abbilden“)



„Links-/Rechtstotal“

Def — Surjektiv

„Links-/Rechtseindeutig“

injektiv — Def

Implizieren schon die Sicht Links/Rechts