Klausur 13.02.2024

Lineare Algebra I

Woche 03

31.10.2023 und 02.11.2023

Abbildung/Funktion

Jedes $x \in X$ kommt vor.

Definition $R \subseteq X \times Y$

Eine Relation (R, X, Y) zwischen X und Y heißt

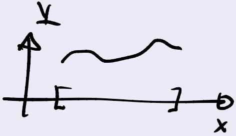
- **linkstotal**, falls für alle $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert, sodass $x \, R \, y$ gilt.
- **rechtseindeutig**, falls für alle $x \in X$ und alle $y_1, y_2 \in Y$ gilt: $x \, R \, y_1 \wedge x \, R \, y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$. Jedes x steht mit höchstens einem y in Relation.

Eine solche Relation (f, X, Y) heißt **Abbildung von X in Y** oder **Funktion von X in Y**.

- X heißt der **Definitionsbereich** oder die **Definitionsmenge**.
- Y heißt die **Zielmenge** von f.

Der **Graph** der Funktion $f\colon X \to Y$ ist

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$



Notation von Funktionen

- $f\colon X \to Y$
- $X \xrightarrow{f} Y$
- $Y \xleftarrow{f} X$
- $\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array}$

- $X \ni x \mapsto f(x) \in Y$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0} \end{array}\right\} \text{nicht gleich}$$

- $f\colon \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

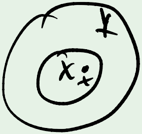
Zwei Funktionen $f\colon X \to Y$, $g\colon W \to Z$ sind gleich, wenn $X = W$, $Y = Z$ und $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X$.

Funktion

Beispiel

1. Die **konstante Funktion** auf X mit dem Wert y_0 ist
$$X \ni x \mapsto f(x) := y_0 \in Y.$$

2. Für Mengen $X \subseteq Y$ heißt die Abbildung $i_{x \to Y}$ mit
$$X \ni x \mapsto i_{X \to Y}(x) := x$$
die **kanonische Einbettung** von X in Y.



3. Für eine Menge X heißt die Abbildung id_X mit
$$X \ni x \mapsto \mathrm{id}_X(x) := x$$
die **identische Abbildung** von X.

Bildmenge

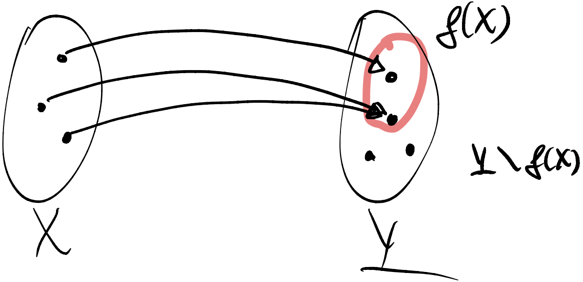
Definition

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

Für $A \subseteq X$ heißt

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y$$

die **Bildmenge** von f **auf** A oder das **Bild** von A **unter** f.



Einschränkung, Fortsetzung

Definition

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

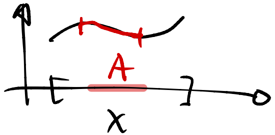
Für $A \subseteq X$ heißt die Funktion $f|_A$ $\quad f|_A \quad$ Nur die Definitions-menge wird geändert.

$$A \ni x \mapsto f|_A(x) := f(x) \in Y$$

die **Einschränkung** oder **Restriktion** von f auf A.

Gilt $f(A) \subseteq B$, so ist $f|_A^B$ die Einschränkung von f auf A, wobei zusätzlich die Zielmenge durch B ersetzt wird: $\quad f|^B = f|^B_X$

$$A \ni x \mapsto f|_A^B(x) := f(x) \in B.$$



Urbild

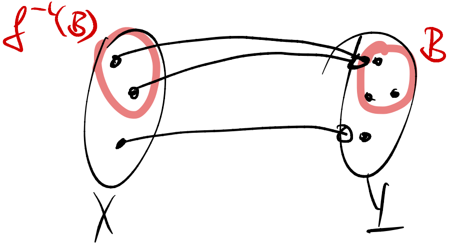
Definition

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

Für $B \subseteq Y$ heißt die Menge

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

das **Urbild** von B **unter** f.



Satz

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Weiter seien $\{X_i \,|\, i \in I\}$ bzw. $\{Y_j \,|\, j \in J\}$ eine Menge von Teilmengen von X bzw. Y. Dann gilt:

a) $$f\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$$

b) $$f\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i)$$

c) $$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$$

d) $$f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$$

Beweis. c) $x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} Y_j\Big)$

$\Leftrightarrow \exists y \in \bigcup Y_j \ (y = f(x))$ nach Def. f^{-1}

$\Leftrightarrow \exists j \in J \ \exists y \in Y_j \ (y = f(x))$ nach Def. von $\bigcup$

$\Leftrightarrow \exists j \in J \ (x \in f^{-1}(Y_j))$ nach Def. f^{-1}

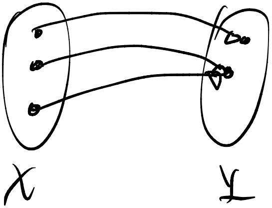
$\Leftrightarrow x \in \bigcup f^{-1}(Y_j)$ nach Def. von $\bigcup$

Surjektivität

immer: $f(X) \subseteq Y$

Definition

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt **surjektiv**, wenn $f(X) = Y$ gilt.



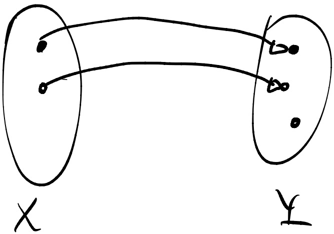
Jedes $y \in Y$ wird getroffen.

$\forall y \in Y \, (f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

Injektivität

Definition

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt **injektiv**, wenn für $x_1, x_2 \in X$ gilt:
$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$.



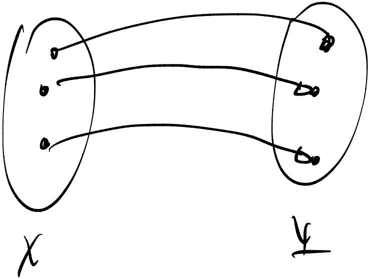
Jedes $y \in Y$ wird höchstens einmal getroffen.

$\forall y \in Y$ ($f^{-1}(\{y\})$ hat höchstens ein Element)

Bijektivität

Definition

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt **bijektiv**, wenn sie surjektiv und injektiv ist.



$\forall y \in Y$ ($f^{-1}(\{y\})$ hat genau ein Element)

Beispiel

$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ nicht surjektiv, nicht injektiv

$-1 \notin f(\mathbb{R})$ $\quad f(1) = f(-1) = 1$

$g\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist surjektiv, nicht injektiv

$f(1) = f(-1) = 1$

$h\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ ist nicht surjektiv, injektiv

$-1 \notin h(\mathbb{R}_{\geq 0})$

$i\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist bijektiv

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ Assoziativität

Definition

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen. $Z \xleftarrow{g} Y \xleftarrow{f} X$, $X \xrightarrow{g \circ f} Z$

Die Funktion

$$X \ni x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \in Z$$

heißt die **Komposition** von f und g. „g nach f"

Beispiel

$f\colon \quad \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$

$g\colon \quad \mathbb{R} \ni x \mapsto x+1 \in \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$

Lemma $g \circ f$

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen.

1. Sind f und g beide injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
2. Sind f und g beide surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
3. Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
4. Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

Beweis. ① Für $x_1, x_2 \in X$ gelte $\underbrace{(g \circ f)(x_1)}_{= g(f(x_1))} = \underbrace{(g \circ f)(x_2)}_{= g(f(x_2))}$.

Aus der Injektivität von g folgt $f(x_1) = f(x_2)$.

Aus der Injektivität von f folgt $x_1 = x_2$. $\square$

③ Es seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Die Injektivität von $g \circ f$ zeigt $x_1 = x_2$ $\square$

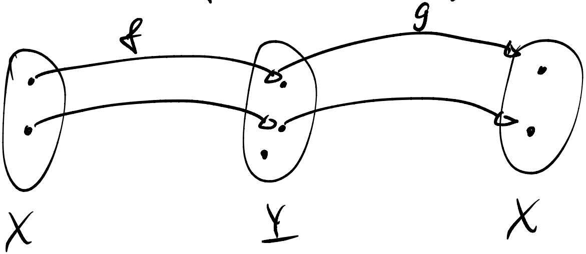
Komposition zur Identität

Folgerung

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to \cancel{Z}\, X$ Funktionen.

Wenn $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ist, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Beweis. id_X ist bijektiv. Also folgt aus dem Lemma, dass f injektiv und g surjektiv ist.



Umkehrfunktion

$\Leftrightarrow$ bijektiv

Definition

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

f heißt **invertierbar**, wenn es eine Funktion $g\colon Y \to X$ gibt mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

In diesem Fall heißt g die **Umkehrfunktion** zu f.

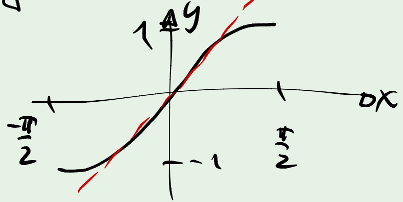
Die Umkehrfunktion ist eindeutig bestimmt und wieder bijektiv.

f^{-1}(Menge) = Urbild, ex. immer

$f^{-1}(y)$ = Wert der Umkehrfkt (falls existiert) an der Stelle $y \in Y$ $\quad f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$

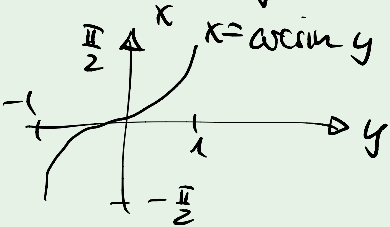
Beispiel

$f(x) = \sin x$, $\quad X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\quad Y = [-1, 1]$



Umkehrfkt. $f^{-1} = \arcsin$
$= \sin^{-1}$

$\Rightarrow y = \sin x$
$x = \arcsin y$



Umkehrfunktion der Komposition

Satz

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ bijektive Funktionen.

Dann ist auch $g \circ f$ bijektiv, und die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Beweis. $g \circ f$ ist bijektiv nach Lemma 6.17 (Folie 14).

$(g\circ f)^{-1}(z) = x \iff z = (g \circ f)(x)$ für alle $x \in X$, $z \in Z$

$\iff z = g(f(x)) \iff g^{-1}(z) = f(x)$

$\iff f^{-1}(g^{-1}(z)) = x \iff (f^{-1} \circ g^{-1})(z) = x$

D.h. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Zwei Funktionen sind gleich, wenn sie in Def. menge, Zielmenge und Vorschrift übereinstimmen.

Charakterisierung der Injektivität

Lemma (Beweis im Skript)

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $X \neq \emptyset$.

Dann sind äquivalent:

1. f ist injektiv.
2. Es existiert eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit der Eigenschaft
$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Eine solche Abbildung heißt eine **Linksinverse** von f. Sie ist notwendig surjektiv. Ihre Einschränkung $g|_{f(X)}$ auf das Bild von f ist eindeutig.

$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n+1$, injektiv, nicht surjektiv.

$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = \begin{cases} n-1 & \text{für } n \geq 2 \\ c & \text{für } n = 1 \end{cases}$ für $c \in \mathbb{N}$ beliebig.

Gibt es eine entsprechende Charakterisierung auch für die Surjektivität?

Ja, aber das benötigt das Auswahlaxiom.

Gleichmächtigkeit von Mengen

Definition

Zwei Mengen X und Y heißen **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$ gibt. Wir schreiben in diesem Fall $X \sim Y$.

- Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.
- Die Äquivalenzklassen heißen **Kardinalzahlen**.

Die leere Menge ist nur zu sich selbst gleichmächtig.

Definition

n ist eindeutig!

Eine Menge X heißt

- **endlich**, wenn $X \sim [\![1, n]\!]$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
  Die Zahl n heißt dann die **Mächtigkeit** oder **Kardinalität** von X.
  Wir schreiben: $\#X = n$.
- **unendlich**, wenn X nicht endlich ist.
- **abzählbar unendlich**, wenn $X \sim \mathbb{N}$ gilt. Nummerierung
- **abzählbar**, wenn X entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.
- **überabzählbar**, wenn X nicht abzählbar ist.

Beispiel

1) $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z}$

   Bijektion $2\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$: $0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots$

   Bijektion $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

2) $\mathbb{Q}$ ist auch abzählbar unendlich!

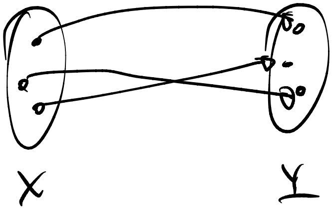
3) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Bijektion $g: X \to Y$

Satz

Es seien X und Y endliche, gleichmächtige Mengen und $f: X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

1. f ist injektiv.
2. f ist surjektiv.
3. f ist bijektiv.



Definition

Es seien X und Y Mengen.

X ist **höchstens gleichmächtig** zu Y, wenn es eine bijektive Abbildung von X auf eine Teilmenge von Y gibt. Wir schreiben in diesem Fall $X \lesssim Y$.

totale

Das ist eine Ordnungsrelation auf der Klasse aller Mengen.

- Reflexivität: $X \lesssim X$ mit id_X
- Transitivität: $X \overset{f}{\lesssim} Y$ und $Y \overset{g}{\lesssim} Z$ mit $g|_{f(X)} \circ f$: Bijektion $X \to$ Tm von Z

  Bij. $f: X \to f(X) \subseteq Y$

  Bij. $g: Y \to g(Y) \subseteq Z$
- Antisymmetrie: Satz von Cantor-Bernstein-Schröder

  $\Leftarrow$ Auswahlaxiom

Familie von Elementen

Definition

Es seien I und Y Mengen.

1. Eine Abbildung
$$I \ni i \mapsto y(i) \coloneqq y_i \in Y$$
heißt eine **Familie von Elementen** aus Y mit der **Indexmenge** I. Kurz wird diese auch mit $(y_i)_{i \in I}$ bezeichnet.
2. Ist $I_0 \subseteq I$, dann heißt $(y_i)_{i \in I_0}$ eine **Teilfamilie** von $(y_i)_{i \in I}$, und $(y_i)_{i \in I}$ heißt eine **Oberfamilie** von $(y_i)_{i \in I_0}$.

Folge

Definition

Es seien I und Y Mengen.

3. Ist I abzählbar unendlich (also $I \sim \mathbb{N}$), so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **abzählbar unendliche Familie**.

   totale Ordnung

   Ist speziell $I = \mathbb{N}$ oder allgemeiner $I = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geqslant n_0\}$ mit einem Startindex $n_0 \in \mathbb{Z}$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **Folge** in Y.

4. Ist I endlich, gilt also $I \sim [\![1, n]\!]$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **endliche Familie**.

   Ist speziell $I = [\![1, n]\!]$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **endliche Folge** in Y.

Bisher hatten wir das **kartesische Produkt** von endlich vielen Mengen $A_1, \dots, A_n$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert:

$$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i := \Big\{ \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{n\text{-}\textbf{Tupel}} \;\Big|\; a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \dots, n \Big\}$$

$\hat{=}$ F(1) ... F(n)

beliebige (Index-) Menge

Definition

Allgemein ist das **kartesische Produkt** einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Mengen ~~mit $I \neq \emptyset$~~ definiert durch

$$\bigtimes_{i \in I} A_i := \Big\{ \underbrace{F \colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i}_{\text{Funktion}} \;\Big|\; F(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \Big\}$$

$A_i = A$ für alle $i \in I$ $\qquad$ A^I = Menge aller Funktionen $I \to A$

Potenznotation von Funktionen

Definition

Es seien X und Y Mengen. Dann bezeichnet

$$Y^X := \{F \mid F \colon X \to Y \text{ ist Funktion}\}.$$

Beispiel

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ = Menge aller $\mathbb{R}$-wertigen Folgen

$\{0,1\}^A$ = die Menge aller $\{0,1\}$-wertigen Funktionen auf A

Bijektion auf $\mathcal{P}(A)$

$X \to$ Struktur werden wir in Kapitel 2 häufig verwenden

Auswahlaxiom

Kann man Elemente des kartesischen Produkts

$$\bigtimes_{i \in I} A_i := \Big\{ \underbrace{F \colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i}_{\text{Funktion}} \;\Big|\; F(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \Big\}$$

einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Mengen überhaupt angeben?

Definition (Auswahlaxiom)

Ist $\mathcal{U}$ eine Menge von nichtleeren Mengen, dann gibt es eine Funktion $F \colon \mathcal{U} \to \bigcup \mathcal{U}$, sodass gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U} \; \big(F(U) \in U \big).$$

Eine solche Funktion F heißt **Auswahlfunktion** für $\mathcal{U}$, weil sie aus jedem Element U von $\mathcal{U}$ irgendein Element auswählt.

Auswirkungen des Auswahlaxioms

Satz

Folgende Aussagen sind in der Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel äquivalent:

1. Es gilt das Auswahlaxiom.
2. Ist I eine beliebige Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen, so ist das kartesische Produkt $\bigtimes_{i \in I} A_i$ nichtleer.
3. Jede Äquivalenzrelation besitzt ein vollständiges Repräsentantensystem.
4. Es sei $f \colon X \to Y$ eine beliebige Funktion. Dann sind äquivalent:
    1. f ist surjektiv.
    2. Es existiert eine Abbildung $h \colon Y \to X$ mit der Eigenschaft $f \circ h = \mathrm{id}_Y$. Eine solche Abbildung heißt eine **Rechtsinverse** von f. Sie ist notwendig injektiv.
5. Es gilt das Lemma von Zorn.

Lemma von Zorn

Lemma

Es sei X mit der Relation $\preccurlyeq$ eine halbgeordnete Menge.

Weiter besitze jede totalgeordnete Teilmenge $A \subseteq X$ eine obere Schranke in X.

Dann existiert in X ein maximales Element.

- Das Lemma von Zorn ist äquivalent zum Auswahlaxiom.
- Wir werden in der Vorlesung darauf hinweisen, wo Resultate vom Auswahlaxiom bzw. vom Lemma von Zorn abhängen.