# Lineare Algebra I

## Woche 02

24.10.2023 und 26.10.2023

# Was ist eine Menge?

Georg Cantor, Begründer der Mengenlehre, hat 1895 folgenden Versuch der Definition einer Menge angegeben:

## Definition

„Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung $X$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten $x$ unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von $X$ genannt werden) zu einem Ganzen.“

Diese Definition ist aber zu ungenau und lässt zuviel als Menge zu, siehe Russell-Paradoxon später.

# Angabe von Mengen

- Aufzählung endlicher Mengen:

$$X := \{2, 3, 5\} = \{5, 2, 3, 2\}$$

(Die Elimination doppelter Elemente geschieht bei der Konstruktion. Elemente einer Menge haben keine Reihenfolge.)

- Angabe einiger Elemente und „offensichtliche" Fortsetzung

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$$

- **Mengenkomprehension** durch Angabe eines **Grundbereichs** $X$ und einer Aussageform $A$ auf $X$:

$$Y := \{x \in X \mid A(x)\}$$

(Auswahl der Elemente $x$ von $X$, für die $A(x)$ wahr ist.)

# Zahlbereiche

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N} \coloneqq \{1, 2, 3, \dots\}$ | **natürliche Zahlen** |
| $\mathbb{N}_0 \coloneqq \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ | **natürliche Zahlen mit Null** |
| $\mathbb{Z} \coloneqq \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ | **ganze Zahlen** |
| $\widetilde{\mathbb{Q}} \coloneqq \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ | **rationale Zahlen** (vorläufig) |
| $\mathbb{R}$ | **reelle Zahlen** |
| $\mathbb{C} \coloneqq \{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ | **komplexe Zahlen** |

# Russell-Paradoxon

Die sehr freie Definition einer Menge nach Cantor lässt es zu, $X$ als die Menge aller Mengen zu definieren. Wählen wir dann $A(x)$ als die Aussageform „enthält sich nicht selbst“, so ist

$$R := \{x \in X \mid x \notin x\}$$

die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.

Enthält $R$ sich selbst?

- Falls $R$ sich selbst enthält ($R \in R$), dann liegt das daran, dass $R$ die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ erfüllt.
- Falls $R$ sich nicht selbst enthält ($R \notin R$), dann erfüllt $R$ die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ nicht, also gilt $R \in R$.

# Ausweg: Axiomatische Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel

- Die Auflösung in der modernen, axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel (**ZF-Mengenlehre**) besteht darin, den Mengenbegriff geeignet einzuschränken. Konstruktionen wie die „Menge aller Mengen“ sind dann nicht mehr möglich.

  In dieser Lehrveranstaltung können wir das aber nicht behandeln.

- Die Mengenkomprehension als Konstruktionsprinzip $Y := \left\{x \in X \,\middle|\, A(x)\right\}$ bleibt in der ZF-Mengenlehre erhalten. Der Grundbereich $X$ der Aussageform $A$ muss aber bereits eine Menge sein, damit wieder eine Menge herauskommt.

- Es gibt allgemeinere Objekte als Mengen, sogenannte Klassen, wie zum Beispiel die **Klasse aller Mengen**.

# Intervalle in $\mathbb{R}$

Intervalle werden mittels Mengenkomprehension definiert:

| | |
|---|---|
| $[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ | abgeschlossen |
| $(a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ | links offen, rechts abgeschlossen |
| $[a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ | links abgeschlossen, rechts offen |
| $(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ | offen |
| $[a, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$ | rechts unendlich, abgeschlossen |
| $(a, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ | rechts unendlich, offen |
| $(-\infty, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$ | links unendlich, abgeschlossen |
| $(-\infty, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ | links unendlich, offen |
| $(-\infty, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid \top\} = \mathbb{R}$ | beidseitig unendlich |
| $[\![a, b]\!] \coloneqq [a, b] \cap \mathbb{Z}$ | ganzzahliges Intervall |

Zur Bedeutung der Attribute offen und abgeschlossen siehe Vorlesung Analysis I.

# Teilmenge, Obermenge

- $A$ ist eine **Teilmenge** von $B$, kurz: $A \subseteq B$,
  wenn jedes Element von $A$ auch ein Element von $B$ ist:

  $$\forall a \in A \, (a \in B).$$

  $B$ ist dann eine **Obermenge** von $A$, kurz: $B \supseteq A$.

- $A$ ist eine **echte Teilmenge** von $B$, kurz: $A \subsetneq B$,
  wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ gilt:

  $$\forall a \in A \, (a \in B) \quad \land \quad \exists b \in B \, (b \notin A).$$

  $B$ ist dann eine **echte Obermenge** von $A$, kurz: $B \supsetneq A$.

# Schnitt von Mengen

**Schnitt** von zwei Mengen $U_1, U_2$:

$$U_1 \cap U_2 := \left\{ x \,\middle|\, x \in U_1 \ \wedge \ x \in U_2 \right\}$$

Schnitt einer indizierten Menge von Mengen $U_i$:

$$\bigcap_{i \in I} U_i := \left\{ x \,\middle|\, \forall i \in I \ (x \in U_i) \right\}$$

Schnitt einer beliebigen Menge $\mathcal{U}$ von Mengen:

$$\bigcap \mathcal{U} := \left\{ x \,\middle|\, \forall U \in \mathcal{U} \ (x \in U) \right\}$$

# Vereinigung von Mengen

**Vereinigung** von zwei Mengen $U_1, U_2$:

$$U_1 \cup U_2 := \{x \,|\, x \in U_1 \ \vee \ x \in U_2\}$$

Vereinigung einer indizierten Menge von Mengen $U_i$:

$$\bigcup_{i \in I} U_i := \{x \,|\, \exists i \in I \ (x \in U_i)\}$$

Vereinigung einer beliebigen Menge $\mathcal{U}$ von Mengen:

$$\bigcup \mathcal{U} := \{x \,|\, \exists U \in \mathcal{U} \ (x \in U)\}$$

# Differenz von zwei Mengen

**Differenzmenge** von $Y$ in $X$:

$$X \setminus Y := \{x \in X \,|\, x \notin Y\}$$

**symmetrische Differenz** von $X$ und $Y$:

$$X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

# Komplement einer Menge in einer Menge

**Komplement** von $A \subseteq X$ in $X$

$$A^c := X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

Die Menge $X$ taucht im Symbol $A^c$ nicht auf. Sie muss aus dem Zusammenhang klar sein.

# Eigenschaften von Schnitt und Vereinigung

## Satz

$$X \cap Y = Y \cap X \qquad \textbf{Kommutativität von } \cap$$
$$X \cup Y = Y \cup X \qquad \textbf{Kommutativität von } \cup$$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) \qquad \textbf{Assoziativität von } \cap$$
$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \qquad \textbf{Assoziativität von } \cup$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \qquad \textbf{Distributivität}$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \qquad \textbf{Distributivität}$$

$$X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$$

$$X \cap Y = X \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$
$$X \cup Y = Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$

# Eigenschaften von Schnitt und Vereinigung

## Satz

Sind $A$ und $B$ Teilmengen einer Menge $X$, bzgl. der wir das Komplement nehmen, so gilt weiter:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad \textbf{De Morgansches Gesetz}$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad \textbf{De Morgansches Gesetz}$$

$$(A^c)^c = A \qquad \text{Komplementbildung ist } \textbf{involutorisch}$$

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad B^c \subseteq A^c$$

# Bindungsregeln

Es bindet ...

$$\cdot^c \text{ stärker als } \setminus \text{ stärker als } \cap \text{ stärker als } \cup$$

Diese Regeln erlauben uns, auf Klammern zu verzichten. Klammern können jedoch zur Verdeutlichung nicht schaden.

### Beispiel

$$(A^c) \cap B \quad \text{ist dasselbe wie} \quad A^c \cap B$$

$$A \setminus B \cup C \quad \text{ist dasselbe wie} \quad (A \setminus B) \cup C$$

# Potenzmenge

Die Menge aller Teilmengen einer Menge $A$

$$\mathcal{P}(A) \coloneqq \{B \mid B \subseteq A\}$$

heißt die **Potenzmenge** von $A$.

## Beispiel

Die Potenzmenge von $A = \{a,\ b,\ c\}$ ist
$\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}\big\}$.

# Kartesisches Produkt von endlich vielen Mengen

**kartesisches Produkt** von zwei Mengen $A_1, A_2$:

$$A_1 \times A_2 := \{\underbrace{(a_1, a_2)}_{\textbf{Paar}} \mid a_1 \in A_1 \ \wedge \ a_2 \in A_2\}$$

**kartesisches Produkt** von endlich vielen Mengen $A_1, \ldots, A_n$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i := \{\underbrace{(a_1, \ldots, a_n)}_{n\textbf{-Tupel}} \mid a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

Paare und Tupel sind geordnet!

# Relation

## Definition

Es seien $X$ und $Y$ Mengen sowie $R \subseteq X \times Y$.
$(R, X, Y)$ heißt eine **Relation** zwischen $X$ und $Y$ mit **Graph** $R$.

Im Fall $X = Y$ heißt die Relation **homogen**.

Wenn $X$ und $Y$ klar sind, sagt man auch oft, $R$ selbst sei die Relation.

## Beispiel

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leqslant y\}$ ist die **Kleiner-Gleich-Relation auf** $\mathbb{R}$.

Statt $(x, y) \in R$ schreibt man oft $x \, R \, y$.

# Teilbarkeitsrelation

## Definition

Die Zahl $x \in \mathbb{Z}$ **teilt** die Zahl $y \in \mathbb{Z}$, kurz: $x \mid y$, wenn eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $y = n\,x$ gilt.

**Teilbarkeitsrelation** $R \coloneqq \big\{(x, y) \,\big|\, x \mid y\big\}$ zwischen $X \subseteq \mathbb{Z}$ und $Y \subseteq \mathbb{Z}$

| $x \mid y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |

## Beispiel

- **Inklusionsrelation** $R = \big\{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \,\big|\, A \subseteq B\big\}$

- Auf einer Menge $X$ heißt

$$\Delta_X \coloneqq \big\{(x, y) \in X \times X \,\big|\, x = y\big\}$$

  die **Diagonale** in $X \times X$. Die Relation $\mathrm{id}_X \coloneqq (\Delta_X, X, X)$ heißt die **Gleichheitsrelation** oder **Identitätsrelation** auf $X$.

- Auf einer Menge $X$ heißt die Relation $U_X \coloneqq (U, X, X)$ mit $U = X \times X$ die **universelle Relation**.

# Darstellungen von Relationen

Wenn $X$ und $Y$ endliche Mengen sind, können wir eine Relation $R \subseteq X \times Y$ auf folgende Arten darstellen:

# Komposition von zwei Relationen

Es seien $X$, $Y$ und $Z$ Mengen sowie $(R, X, Y)$ und $(S, Y, Z)$ zwei Relationen. Dann heißt die Relation $(S \circ R, X, Z)$ mit

$$S \circ R \coloneqq \big\{(x, z) \in X \times Z \,\big|\, \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\big\}$$

die **Komposition** von $R$ und $S$.

## Beispiel

# Umkehrrelation

Es seien $X$ und $Y$ Mengen und $(R, X, Y)$ eine Relation. Dann heißt $(R^{-1}, Y, X)$ die **Umkehrrelation** oder **inverse Relation** von $R$ mit

$$R^{-1} \coloneqq \big\{(b, a) \in Y \times X \,\big|\, (a, b) \in R\big\} \subseteq Y \times X.$$

## Beispiel

# Eigenschaften homogener Relationen

## Definition

Es sei $X$ eine Menge und $(R, X, X)$ eine Relation auf $X$.

| $R$ heißt ... | wenn gilt: |
|---|---|
| **reflexiv**: | $(x, x) \in R \quad$ für alle $x \in X$ |
| **symmetrisch**: | $(x, y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in R$ |
| **antisymmetrisch**: | $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R \quad \Rightarrow \quad x = y$ |
| **transitiv**: | $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in R$ |
| **total**: | $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R \quad$ für alle $x, y \in R$ |

# Eigenschaften homogener Relationen

Bei Darstellung der Relation auf einer endlichen Menge als gerichteter Graph:

# Ordnungsrelation

## Definition

Es sei $X$ eine Menge.

1. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation $(R, X, X)$ auf $X$ heißt eine **Ordnungsrelation**, **Halbordnung** oder **partielle Ordnung**.

   $(X, R)$ heißt dann eine **halbgeordnete Menge**.

2. Ist $R$ zusätzlich total, dann heißt sie eine **Totalordnung**.

   $(X, R)$ heißt dann eine **totalgeordnete Menge**.

# Ordnungsrelation

## Beispiel

1. Die Inklusionsrelation $\subseteq$ ist eine Halbordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ jeder beliebigen Menge $X$. Sie ist eine totale Ordnung dann und nur dann, wenn $X$ entweder kein oder genau ein Element enthält.

2. Die Teilbarkeitsrelation $\mid$ ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$.

# Vergleichbarkeit, obere Schranke, Supremum

## Definition

Es sei $X$ mit der Relation $\preccurlyeq$ eine halbgeordnete Menge.

- $x, y \in X$ heißen **vergleichbar**, wenn $x \preccurlyeq y$ oder $y \preccurlyeq x$ gilt.
- $b \in X$ heißt eine **obere Schranke** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$x \preccurlyeq b \quad \text{für alle } x \in A.$$

- $b \in X$ heißt ein **Supremum** oder **kleinste obere Schranke** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$b$ ist eine obere Schranke von $A$,

und für jede obere Schranke $\widehat{b}$ von $A$ gilt: $b \preccurlyeq \widehat{b}$.

# maximales Element, Maximum

**Definition**

Es sei $X$ mit der Relation $\preccurlyeq$ eine halbgeordnete Menge.

- $b \in X$ heißt ein **maximales Element** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

  $$\begin{aligned} & b \in A, \\ & \text{und für alle } x \in A \text{ gilt: } b \preccurlyeq x \;\Rightarrow\; x = b. \end{aligned}$$

- $b \in X$ heißt ein **Maximum** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

  $$\begin{aligned} & b \in A, \\ & \text{und für alle } x \in A \text{ gilt: } x \preccurlyeq b. \end{aligned}$$

# Supremum, maximales Element, Maximum

## Beispiel

# Äquivalenzrelation

## Definition

Es sei $X$ eine Menge.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation $(R, X, X)$ auf $X$ heißt eine **Äquivalenzrelation**.

# Äquivalenzrelation

## Beispiel

# Äquivalenzklassen und Repräsentanten

## Definition

Es sei $X$ eine Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

1. Für $x \in X$ heißt die Menge

   $$[x] \coloneqq \{y \in X \mid y \sim x\}$$

   die **Äquivalenzklasse** von $x$ bzgl. $\sim$.

2. Jedes Element einer Äquivalenzklasse heißt ein **Repräsentant** dieser Äquivalenzklasse.

3. Eine Menge $S \subseteq X$, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten enthält, heißt ein **Repräsentantensystem** von $\sim$.

# Äquivalenzklassen und Repräsentanten

## Beispiel

# Äquivalenzklassen sind gleich oder disjunkt

**Satz**

Es sei $X$ eine Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$ und $[x]$ und $[y]$ zwei Äquivalenzklassen. Dann sind diese entweder gleich oder disjunkt.

Beweis.

# Partition

## Definition

Es sei $X$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{U}$ eine Menge von Teilmengen von $X$, also $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{U}$ heißt eine **Partition** oder **disjunkte Zerlegung** von $X$, wenn gilt:

1. Für alle $x \in X$ gibt es eine Menge $U \in \mathcal{U}$, die $x$ enthält.
2. Für alle $U, V \in \mathcal{U}$ sind $U$ und $V$ entweder gleich oder disjunkt.
3. $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

# Partionen „sind“ Äquivalenzrelationen

## Satz

1. Es sei $X$ eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

   Dann bildet die Menge der Äquivalenzklassen $\big\{[x] \,\big|\, x \in X\big\}$ eine Partition von $X$.

2. Es sei $X$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{U}$ eine Partition von $X$.

   Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation $\sim$, sodass $\mathcal{U}$ genau aus den Äquivalenzklassen von $\sim$ besteht.

# Quotientenmenge

## Definition

Es sei $X$ eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

Die Menge der Äquivalenzklassen

$$X \,/ \sim := \big\{ [x] \;\big|\; x \in X \big\}$$

heißt auch die **Quotientenmenge** oder die **Faktormenge** von $\sim$.

## Beispiel

# Rationale Zahlen

Wir hatten die Menge der rationalen Zahlen vorläufig eingeführt als

$$\widetilde{\mathbb{Q}} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Wir wollen aber beispielsweise $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ und $\frac{-2}{-4}$ miteinander identifizieren. Zu diesen Zweck verwenden wir die Äquivalenzrelation

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1.$$

Das führt uns zur Definition

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} / \sim$$

für die **rationalen Zahlen** als Quotientenmenge.