Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 02

Link zu diesen Folien

Was bringt Ihnen die Plenarübung eigentlich?

Vorlesung
Vorstellen neuer Konzepte

Übungsaufgaben
Learning by doing mit diesen Konzepten

Tutorien
Unterstützung im Selbstarbeitsprozess

Help Desk
Individuelle Unterstützung im Selbstarbeitsprozess

Plenarübung
Einordnen, Wiederholen, Erweitern der neuen Fähigkeiten und Konzepte
Beseitigen von Unklarheiten

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	52	24.64%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	25	11.85%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	37	17.54%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	131	62.09%
Gesamt(Brutto)	**245**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	11	5.21%
Keine Antwort	69	32.70%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	131	62.09%
Gesamt(Brutto)	**211**	**100.00%**

Gehäuftes Interesse am Aufarbeiten der Skriptinhalte:

(1) Mengenoperationen

(2) Wiederholung / Visualisierung von

- (i) Relationseigenschaften
- (ii) Ordnung (Infimum, Supremum, Min./Max. Elemente)
- (iii) Beziehung Äquivalenzklassen und Partitionen

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen

(2) Verknüpfung von Mengen- und Quantoraussagen

(3) Intuition für Relationseigenschaften verbessern

(4) Charakter von Ordnung und Äquivalenz herausarbeiten

Arbeitsplan

(1) Wochenüberblick

(2) Warmrechnen mit Mengen und Aussageformen

(3) Erweiterung Visualisierung von Relationseigenschaften

(4) Arbeiten mit Ordnungs- und Äquivalenzrelationen in Skriptbeispielen und Übungsaufgaben

(5) Induktionsargumente wiederholen

Mengen und Mengenoperationen
$A, B, \cup, \cap, \setminus, {}^c, \Delta, \mathcal{P}(\cdot)$

↓ Kartesisches Produkt liefert Tupel (Paare)

Relationen
(R, X, Y) X, Y Mengen
$R \subseteq X \times Y$

↓ Reflexivität, Transitivität (Homogenität)

Antisymmetrie →

Ordnungsrelationen $\leq, \preccurlyeq, \subseteq$

Extremalkonzepte (Inf, Sup, Maximum, …, Minimale Elemente …

↓ Totalität (Vergleichbarkeit)

Totalordnungen

Symmetrie →

Äquivalenzrelationen, $\sim$

Äquivalenzklassen (Identifikation)

Repräsentanten

Partitionen

Aufgabe

Es seien A, B, C Teilmengen einer nichtleeren Menge X. Geben Sie für jede der Aussagen links eine logische äquivalente Aussage aus den Optionen rechts an.

(i) $\forall x \in X\ ((x \in A \wedge x \in C) \vee x \in B)$	(I) $(A \cup B) \cap C = B \cap C$
(ii) $\forall x \in C\ (x \notin A \vee x \in B)$	(II) $(A \cap B) \cup C \neq C$
(iii) $\exists x \in B\ (x \notin C \wedge x \in A)$	(III) $(A \cap C) \cup B = X$

(i)$\Leftrightarrow$(III) Per Definition von Schnitt und Vereinigung

(iii)$\Leftrightarrow$(II) $(A\cap B)\cup C \neq C \Leftrightarrow A\cap B \not\subseteq C \Leftrightarrow (A\cap B)\cap C^c \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \exists x\in X\,(x\in A \wedge x\in B \wedge x\in C^c) \Leftrightarrow$ (iii)

(ii)$\Leftrightarrow$(I) $(A\cup B)\cap C = B\cap C \Leftrightarrow (A\cap C)\cup(B\cap C) = (B\cap C)$

$\Leftrightarrow A\cap C \subseteq B\cap C \Leftrightarrow \forall x\in C\,(x\in A \Rightarrow x\in B)$

$\Leftrightarrow$ (ii)

Digraph-Darstellung von Eigenschaften homog. Relationen

Visualisierung $x \longrightarrow y$ entspricht xRy

Für diskrete (endlichen) Mengen können wir Relationen (vollständig) als gerichteten Graph darstellen, wo xRy einem Pfeil von x zu y entspricht.

reflexiv

Alle Elemente sind selbstverbunden

symmetrisch

Jeder Pfeil hat Rückrichtung

antisymmetrie

kann nicht auftreten (Nur Schleifen)

transitiv

Keine Umwege nötig

total

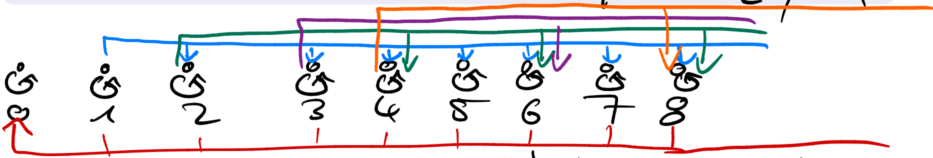
Mindestens 1 Pfeil verbindet je zwei Elemente

Relationseigenschaften an Beispiel 5.6

Untersuchung der folgenden Aussage

Erweiterung Statt

Die Teilbarkeitsrelation $\mid$ auf $\mathbb{N}_0$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, aber nicht symmetrisch oder total. $x \mid y :\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\ y = nx$



Reflexivität Es sei $x = y \in \mathbb{N}_0$. Dann ist mit $n = 1$ $x = y = 1y = \underbrace{n}_{\in \mathbb{Z}}y$

Antisymmetrie $\underbrace{x = n_1 y}_{y \mid x}$ und $\underbrace{y = n_2 x}_{x \mid y}$ $\Rightarrow$ $x = \underbrace{n_1 n_2}_{\in \mathbb{Z}} x$ $\Rightarrow$ $1 = n_1 n_2$ $\Rightarrow$ $x = y$

oder $x = y = 0$

Transitivität Es seien x, y, z, $x \mid y$ und $y \mid z$ also $y = n_1 x$ und $z = n_2 y$

$z = \underbrace{n_2 n_1}_{\in \mathbb{Z}} x \Rightarrow x \mid z$.

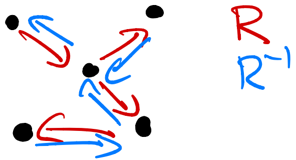
Symmetrie $2 \mid 4$ aber nicht $4 \mid 2$

Totalität Weder $2 \mid 3$ noch $3 \mid 2$

Komposition und inverse Relationen in Digraph-Darstellung

Inverse Relation

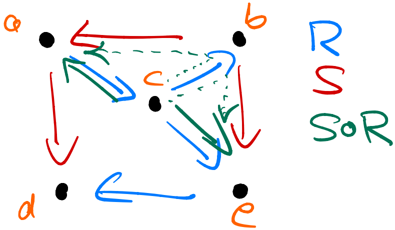
$R^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$



Pfeile werden umgedreht

Komposition

$S \circ R := \{(x,z) \mid \exists y((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S)\}$



Aneinanderhängende Pfeile werden zusammengefasst

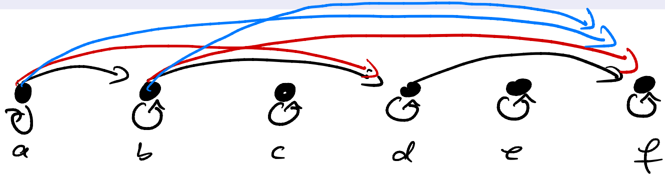
Wieviele Möglichkeiten, einen Pfeil einzufügen, um mit S∘R bei d herauszukommen?

~~5 Mögl.~~ 4 Mögl.

Ordnungs- und Äquivalenzrelationen in Digraph-Darstellung

(Totale) Ordnungsrelation

reflexiv, transitiv, antisymmetrisch, (total)



Pfeile rückwärts nicht möglich wegen antisymm.

"Ordnung erkennbar"

Äquivalenzrelation

reflexiv, transitiv, symmetrisch

Äquivalenzrelationen liefern immer vollverbundene Untergraphen. Wenn man im Graph links nur die schwarzen Komponenten vorgibt ergeben sich alle weiteren aus der Symmetrie und der Transitivität

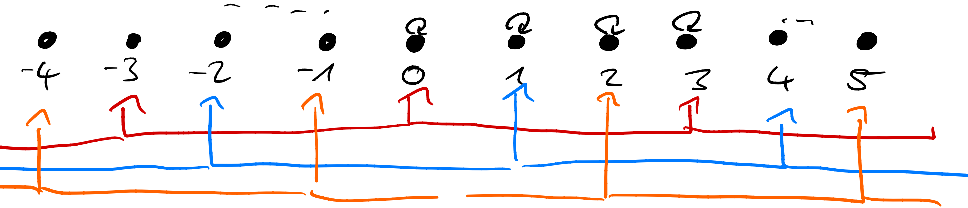
Die roten Kreise markieren die Äquivalenzklassen, welche eine Partition liefern. Wären die Kreise vorgegeben könnte man sofort alle Untergraphen in den Kreisen vollverbinden um eine Äqu.-Rel zu erhalten.

Äquivalenzrelationen an Beispiel 5.14

Kongruenzrelation modulo $m > 1$ in Z

$\mathbb{Z} / m\mathbb{Z} := \{[z]_{\sim m} \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1] \ldots [m-1]\} =$
$\{\{0 + m\mathbb{Z}\}, \{1 + m\mathbb{Z}\} \ldots \{m - 1 + m\mathbb{Z}\}\}$

Bspl. $m=3$



$[0] = \{\ldots -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$ $[1] = \{\ldots -5, -2, 1, 4, 7 \ldots\}$ $[2] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5 \ldots\}$

Repr. Repr. Repr.

Äquivalenzklassen

Nein $0 \in [0], 6 \in [0]$ Ja Ja

Welches sind Repräsentantensysteme? $\{0, 4, 6\}, \{-3, 7, 2\}, \{5, 9, 1\}$

Hausaufgabe 2.4

Lemma

I. A. ist die Komposition von Äquivalenzrelationen keine Äquivalenzrel.

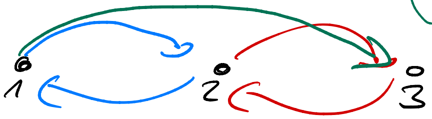
Reflexivität bleibt erhalten, nicht jedoch Symmetrie oder Transitivität.

$X = \{1,2,3\}$, $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

$S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$

$(1,3)$

Für $(3,1)$ ist die Reihenfolge falsch



$S \circ R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3)\}$ Es fehlt $(3,1)$ für Symmetrie

und auch Transitivität.

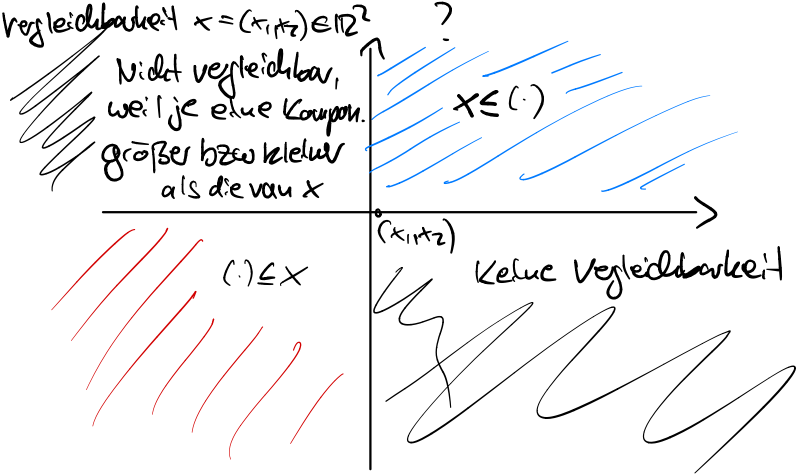
Hausaufgabe 2.3 extended (Ordnungsrelationen)

Komponentenweise Ordnungsrelation im $\mathbb{R}^2$

Vergleichbarkeit bzgl. der Relation $x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$

$R := \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \forall i = 1, 2\ (x_i \leqslant y_i)\}$

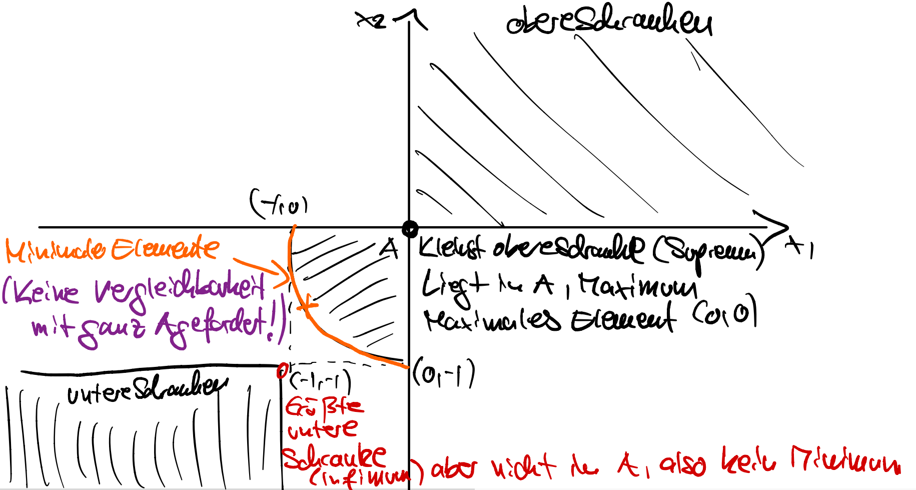
Vergleichbarkeit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$



Hausaufgabe 2.3 extended (Ordnungsrelationen)

Extremkonzepte im $\mathbb{R}^2$ bzgl. R

Bestimmen Sie Infimum/Supremum bzw. Minimum/Maximum der Menge $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \wedge x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0\}$ bzgl. R.



Induktionsbeweis Option 1 (Hausaufgabe 2.2)

Satz

Es sei n eine natürliche Zahl und X eine Menge mit genau n versch. Elementen. Dann enthält $\mathcal{P}(X)$ genau 2^n verschiedene Elemente.

<u>Beweis</u>: Zu zeigen: $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}\ (X \text{ hat } n \text{ Elemente} \Rightarrow \mathcal{P}(X) \text{ hat } 2^n \text{ Elemente})}_{\forall n\in\mathbb{N}\,(A(n))}$ Induktion!

<u>IA ($n=1$)</u>: Sei $X = \{x\}$ gegeben, dann ist
$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{x\}\} = \{\emptyset, X\}$ mit genau $2 = 2^1$ Elementen.

<u>IS</u> ($n \to n+1$) Sei X mit $n+1$ El. gegeben und sei $x \in X$. Dann hat $X \setminus \{x\}$ n Elemente.
Nach <u>IV</u> hat $\mathcal{P}(X\setminus\{x\})$ genau 2^n Elemente. Wir zeigen, dass

$$\mathcal{P}(X) = \underbrace{\mathcal{P}(X\setminus\{x\})}_{2^n\text{ El.}} \,\dot\cup\, \underbrace{\{A \cup \{x\} \mid A \in \mathcal{P}(X\setminus\{x\})\}}_{=: P_x \quad 2^n \text{ El.}} \text{ disjunkt} \Rightarrow 2^{n+1} \text{ El. } \text{„} \mathcal{P}(X)\text{"}$$

1. Vereinigung disjunkt weil links nie $\{x\}$ und rechts immer $\{x\}$ enthalten ist
2. „$\supseteq$" $\mathcal{P}(X\setminus\{x\}) \subseteq \mathcal{P}(X\setminus\{x\})$ und $P_x \subseteq \mathcal{P}(X)$
3. „$\subseteq$" Sei $C \in \mathcal{P}(X)$. $x \in C \Rightarrow C\setminus x \in \mathcal{P}(X\setminus\{x\}) \Rightarrow C \in P_x$ und $x \notin C \Rightarrow C \in \mathcal{P}(X\setminus\{x\})$ $\square$

Induktionsbeweis Option 2 (De Morgan induktiv)

Satz

Es seien Mengen A_n für $n \in \mathbb{N}$ Teilmengen einer Menge X. Dann ist

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k^c).$$

<u>Beweis</u>: Aussagestruktur: $\forall n \in \mathbb{N}\,(A(n))$ Induktion!

IA $n=1$: Nichts zu zeigen, da Aussage zu $A_1^c = A_1^c$ vereinfacht.

IS $n \to n+1$:

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right)^c = \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}\right)^c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz} \\ \text{aus VL}}}{=} \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c \cup A_{n+1}^c$$

$$\overset{IV}{=} \bigcup_{k=1}^{n} (A_k^c) \cup (A_{n+1}^c) = \bigcup_{k=1}^{n+1} (A_k^c)$$

$\square$

Induktionsbeweis - Alle Pferde haben die gleiche Farbe

Satz ...

__Beweis:__ Für Pferde p, q sei $A(p,q)$: p und q sind gleichfarbig

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $M(n)$ eine Menge mit n Pferden

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall M(n) \in \mathcal{P}(\text{Pferde})\ \forall p,q \in M(n)\ (A(p,q))$

__IA($n=1$):__ $M(1)$ hat nur ein Pferd $\vec{p}$, also $\forall q \in M(1)$ ist $A(p,q) = A(p,p)$ wahr ✓

__IS($n \to n+1$):__ $M(n+1)$ habe $n+1$ Pferde und $p_1, p_2 \in M(n+1)$, $p_1 \neq p_2$. Teile $M(n+1)$ disjunkt in

$$M(n+1) = \underbrace{M(n+1)\setminus\{p_1,p_2\}}_{\substack{n-1 \\ \in!}} \cup \underbrace{\{p_1,p_2\}}_{2 \in!}$$

$\emptyset! \to$

$\leftarrow$ IV nicht anwendbar

IV $\Rightarrow A(p_1,p_2)$ und $A(p,q)\ \forall p,q \in M(n+1)\setminus\{p_1,p_2\}$

$1 \to 2$ $\quad n+1=2$ $\Rightarrow n-1=0 \notin \mathbb{N}$

$$= \underbrace{M(n+1)\setminus\{p_1\}}_{n \in!} \cup \underbrace{\{p_1\}}_{1 \in!}$$

IV $\Rightarrow A(p_2,p)\ \forall p \in M(n+1)\setminus\{p_1\}$

$\Rightarrow A(p_2,p)\ \forall p \in M(n+1)$ $\square$

Fall $n=1$, $n+1=2$ geht schief, da IV nicht anwendbar!