Lineare Algebra I

Woche 02

24.10.2023 und 26.10.2023

Was ist eine Menge?

Georg Cantor, Begründer der Mengenlehre, hat 1895 folgenden Versuch der Definition einer Menge angegeben:

Definition

„Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung X von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten x unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von X genannt werden) zu einem Ganzen."

Diese Definition ist aber zu ungenau und lässt zuviel als Menge zu, siehe Russell-Paradoxon später.

Mengen sind alleine durch ihre Elemente bestimmt.

Insbesondere: $X = Y \Leftrightarrow \forall x \in X \, (x \in Y)$
$\wedge \forall x \in Y \, (x \in X)$

Angabe von Mengen

- Aufzählung endlicher Mengen:

$$X := \{2, 3, 5\} = \{5, 2, 3, 2\}$$

  (Die Elimination doppelter Elemente geschieht bei der Konstruktion. Elemente einer Menge haben keine Reihenfolge.)

- Angabe einiger Elemente und „offensichtliche“ Fortsetzung

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

- **Mengenkomprehension** durch Angabe eines **Grundbereichs** X und einer Aussageform A auf X:

„ist wahr“

$$Y := \{x \in X \mid A(x)\}$$

  (Auswahl der Elemente x von X, für die $A(x)$ wahr ist.)

Zahlbereiche

$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$	**natürliche Zahlen**
	$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	**natürliche Zahlen mit Null**
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$	**ganze Zahlen**
	Zähler	
$\widetilde{\mathbb{Q}}$	$\widetilde{\mathbb{Q}} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle\vert\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$	**rationale Zahlen** (vorläufig)
	Nenner	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	**reelle Zahlen**
$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} := \{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	**komplexe Zahlen**

Russell-Paradoxon

Die sehr freie Definition einer Menge nach Cantor lässt es zu, X als die Menge aller Mengen zu definieren. Wählen wir dann $A(x)$ als die Aussageform „enthält sich nicht selbst“, so ist

$$\boxed{R := \{x \in X \,|\, x \notin x\}}$$

die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.

Enthält R sich selbst?

- Falls R sich selbst enthält ($R \in R$), dann liegt das daran, dass R die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ erfüllt.
- Falls R sich nicht selbst enthält ($R \notin R$), dann erfüllt R die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ nicht, also gilt $R \in R$.

$R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ $\lightning$ Widerspruch

Ausweg: Axiomatische Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel

- Die Auflösung in der modernen, axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel (**ZF-Mengenlehre**) besteht darin, den Mengenbegriff geeignet einzuschränken. Konstruktionen wie die „Menge aller Mengen“ sind dann nicht mehr möglich.

  In dieser Lehrveranstaltung können wir das aber nicht behandeln.

- Die Mengenkomprehension als Konstruktionsprinzip $Y := \{x \in X \mid A(x)\}$ bleibt in der ZF-Mengenlehre erhalten. Der Grundbereich X der Aussageform A muss aber bereits eine Menge sein, damit wieder eine Menge herauskommt.

- Es gibt allgemeinere Objekte als Mengen, sogenannte Klassen, wie zum Beispiel die **Klasse aller Mengen**.

Intervalle in $\mathbb{R}$

$a \le x \;\wedge\; x \le b$

$\in \mathbb{R}$ (Endpunkte)

Intervalle werden mittels Mengenkomprehension definiert:

endliche / beschränkte Intervalle

$[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$		**abgeschlossen**
$(a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$		**links offen, rechts abgeschlossen**
$[a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$		**links abgeschlossen, rechts offen**
$(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$]a,b[$	**offen**
$[a, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$		**rechts unendlich, abgeschlossen**
$(a, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$		**rechts unendlich, offen**
$(-\infty, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$		**links unendlich, abgeschlossen**
$(-\infty, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$		**links unendlich, offen**
$(-\infty, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid \top\} = \mathbb{R}$	wahr	**beidseitig unendlich**
$[\![a, b]\!] \coloneqq [a, b] \cap \mathbb{Z}$		**ganzzahliges Intervall** $\subseteq \mathbb{Z}$

Zur Bedeutung der Attribute offen und abgeschlossen siehe Vorlesung Analysis I.

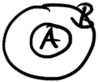
Teilmenge, Obermenge

$B \supseteq A$

Venn-Diagramme

- A ist eine **Teilmenge** von B, kurz: $A \subseteq B$,
  wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist:

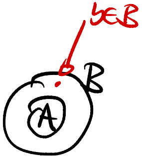
$$\forall a \in A \, (a \in B).$$



$A = B$ erlaubt

B ist dann eine **Obermenge** von A, kurz: $B \supseteq A$.

$B \supsetneq A$ ~~$A \subset B$~~



- A ist eine **echte Teilmenge** von B, kurz: $A \subsetneq B$,
  wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ gilt:

$$\underbrace{\forall a \in A \, (a \in B)}_{A \subseteq B} \quad \land \quad \exists b \in B \, (b \notin A).$$

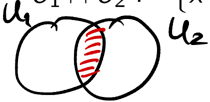
B ist dann eine **echte Obermenge** von A, kurz: $B \supsetneq A$.

Schnitt von Mengen

U_1, U_2 disjunkt : $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

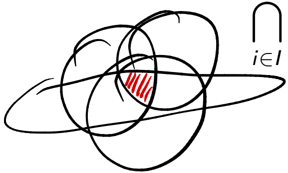
Schnitt von zwei Mengen U_1, U_2:

$$U_1 \cap U_2 := \{x \,|\, x \in U_1 \ \wedge \ x \in U_2\}$$

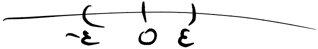


Schnitt einer indizierten Menge von Mengen U_i: I = Indexmenge

$$\bigcap_{i \in I} U_i := \{x \,|\, \forall i \in I \ (x \in U_i)\}$$



$$\bigcap_{\varepsilon > 0} (-\varepsilon, \varepsilon) = \{0\}$$



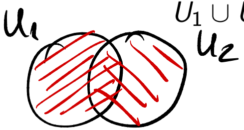
Schnitt einer beliebigen Menge $\mathcal{U}$ von Mengen:

$$\bigcap \mathcal{U} := \{x \,|\, \forall U \in \mathcal{U} \ (x \in U)\}$$

Vereinigung von Mengen

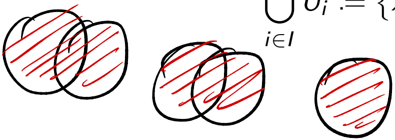
Vereinigung von zwei Mengen U_1, U_2:

$$U_1 \cup U_2 := \{x \mid x \in U_1 \ \vee \ x \in U_2\}$$

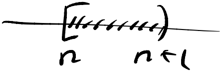


Vereinigung einer indizierten Menge von Mengen U_i:

$$\bigcup_{i \in I} U_i := \{x \mid \exists i \in I \ (x \in U_i)\}$$



$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1) = \mathbb{R}$$



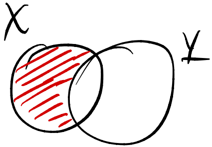
Vereinigung einer beliebigen Menge $\mathcal{U}$ von Mengen:

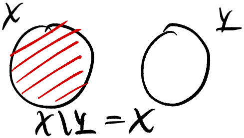
$$\bigcup \mathcal{U} := \{x \mid \exists U \in \mathcal{U} \ (x \in U)\}$$

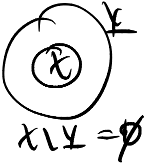
$X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$

Differenzmenge von Y in X: „X ohne Y"

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$$



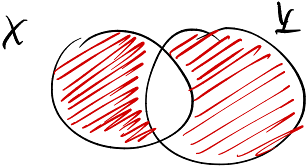




symmetrische Differenz von X und Y:

„Was unterscheidet X und Y"?

$$X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

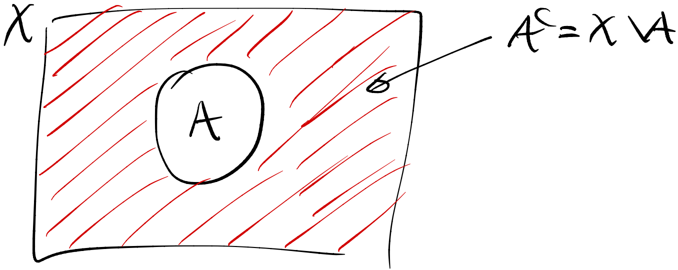


Komplement einer Menge in einer Menge

Komplement von $A \subseteq X$ in X

$$A^c := X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

Die Menge X taucht im Symbol A^c nicht auf. Sie muss aus dem Zusammenhang klar sein.



Eigenschaften von Schnitt und Vereinigung

Satz

$$X \cap Y = Y \cap X \qquad \textbf{Kommutativität von } \cap$$
$$X \cup Y = Y \cup X \qquad \textbf{Kommutativität von } \cup$$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) \qquad \textbf{Assoziativität von } \cap$$
$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \qquad \textbf{Assoziativität von } \cup$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \qquad \textbf{Distributivität}$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \qquad \textbf{Distributivität}$$

$$X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$$

$$X \cap Y = X \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$
$$X \cup Y = Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$

Eigenschaften von Schnitt und Vereinigung

Satz

Sind A und B Teilmengen einer Menge X, bzgl. der wir das Komplement nehmen, so gilt weiter:

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ **De Morgansches Gesetz**

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ **De Morgansches Gesetz**

$(A^c)^c = A$ Komplementbildung ist **involutorisch**
selbst-invers

$A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$

Bindungsregeln

bindet schwächer

Es bindet . . . $A^C \subseteq B \cup D$

$\cdot^c$ stärker als $\setminus$ stärker als $\cap$ stärker als $\cup$

Diese Regeln erlauben uns, auf Klammern zu verzichten. Klammern können jedoch zur Verdeutlichung nicht schaden.

Beispiel

$$(A^c) \cap B \quad \text{ist dasselbe wie} \quad A^c \cap B$$

$$A \setminus B \cup C \quad \text{ist dasselbe wie} \quad (A \setminus B) \cup C$$

Potenzmenge

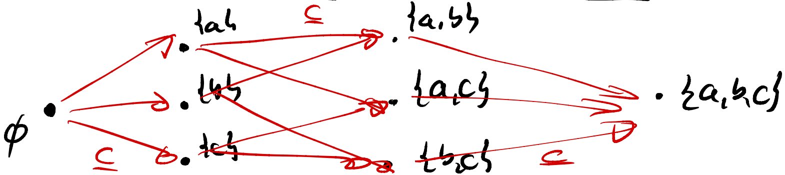
Die Menge aller Teilmengen einer Menge A

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

heißt die **Potenzmenge** von A.

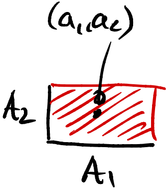
Beispiel $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ Binomialk. $\binom{n}{k}$

Die Potenzmenge von $A = \{a, b, c\}$ ist
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.



Kartesisches Produkt von endlich vielen Mengen

kartesisches Produkt von zwei Mengen A_1, A_2:

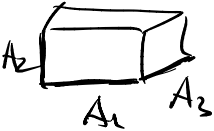


$$A_1 \times A_2 := \{\underbrace{(a_1, a_2)}_{\textbf{Paar}} \mid a_1 \in A_1 \ \wedge \ a_2 \in A_2\}$$

$A_1 \times A_2 \times A_3$

kartesisches Produkt von endlich vielen Mengen $A_1, \ldots, A_n$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i := \{\underbrace{(a_1, \ldots, a_n)}_{n\text{-}\textbf{Tupel}} \mid a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$



Paare und Tupel sind geordnet!

Paar = 2-Tupel

Relation

Definition

Es seien X und Y Mengen sowie $R \subseteq X \times Y$.
(R, X, Y) heißt eine **Relation** zwischen X und Y mit **Graph** R.

Im Fall $X = Y$ heißt die Relation **homogen**.

Wenn X und Y klar sind, sagt man auch oft, R selbst sei die Relation.

Beispiel

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$ ist die **Kleiner-Gleich-Relation auf** $\mathbb{R}$.

Statt $(x, y) \in R$ schreibt man oft $x\,R\,y$.

$(1,2) \in R$, $(2,2) \in R$, $(3,2) \notin R$

Teilbarkeitsrelation

$(x,y) \in |$

Definition

Die Zahl $x \in \mathbb{Z}$ **teilt** die Zahl $y \in \mathbb{Z}$, kurz: $x \mid y$, wenn eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $y = n\,x$ gilt.

Teilbarkeitsrelation $R := \{(x,y) \,|\, x \mid y\}$ zwischen $X \subseteq \mathbb{Z}$ und $Y \subseteq \mathbb{Z}$

$x \mid y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	•								
1	•	•	•	•	•	•	•	•	•
2	•		•		•		•		•
3	•			•			•		
4	•				•				•
5	•					•			
6	•						•		
7	•							•	
8	•								•

Relationen

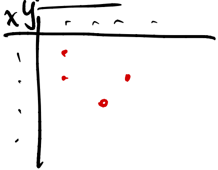
Beispiel

- **Inklusionsrelation** $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\}$
- Auf einer Menge X heißt
$$\Delta_X := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$
die **Diagonale** in $X \times X$. Die Relation $\mathrm{id}_X := (\Delta_X, X, X)$ heißt die **Gleichheitsrelation** oder **Identitätsrelation** auf X.
- Auf einer Menge X heißt die Relation $U_X := (U, X, X)$ mit $U = X \times X$ die **universelle Relation**.

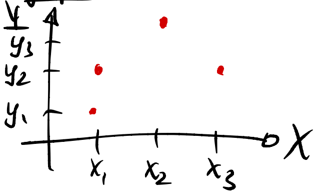
Darstellungen von Relationen

Wenn X und Y endliche Mengen sind, können wir eine Relation $R \subseteq X \times Y$ auf folgende Arten darstellen:

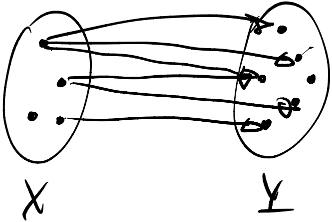
Tabelle



Graph

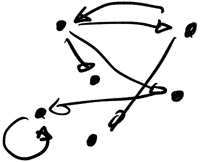


Pfeildiagramm



$X = Y$ gerichteter Graph

$\boxed{\begin{array}{c} x \to y \\ (x,y) \in R \end{array}}$



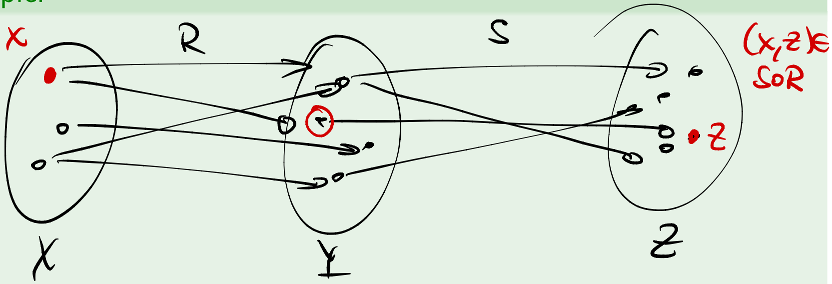
Es seien X, Y und Z Mengen sowie (R, X, Y) und (S, Y, Z) zwei Relationen. Dann heißt die Relation $(S \circ R, X, Z)$ mit

$$S \circ R := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}$$

„S nach R"

die **Komposition** von R und S.

Beispiel

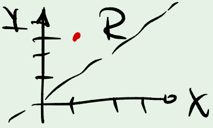


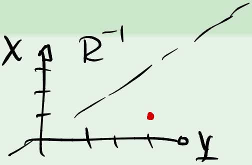
Umkehrrelation

Es seien X und Y Mengen und (R, X, Y) eine Relation. Dann heißt (R^{-1}, Y, X) die **Umkehrrelation** oder **inverse Relation** von R mit

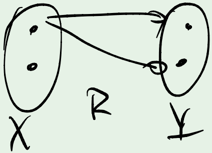
$$R^{-1} := \{(b, a) \in Y \times X \mid (a, b) \in R\} \subseteq Y \times X.$$

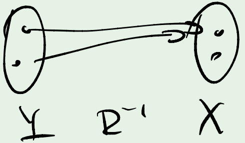
Beispiel





Spiegelung





Pfeile umdrehen

Eigenschaften homogener Relationen $X = Y$

Definition

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X.

R heißt …	wenn gilt:	
reflexiv:	$(x, x) \in R$ für alle $x \in X$	$\Delta_X \subseteq R$
symmetrisch:	$(x, y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in R$	$R^{-1} \subseteq R$
antisymmetrisch:	$(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R \quad \Rightarrow \quad x = y$	
transitiv:	$(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in R$	
total:	$(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$ für alle $x, y \in \cancel{R}\, X$	

Eigenschaften homogener Relationen

Bei Darstellung der Relation auf einer endlichen Menge als gerichteter Graph:

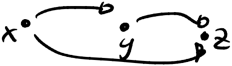
reflexiv: Alle Schleifen sind dabei

symmetrisch: Jeder Pfeil hat eine Umkehrung

antisymmetrisch: Bis auf Schleifen keine Doppelpfeile

$\Rightarrow x = y$

transitiv: $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ $\Rightarrow (x,z) \in R$



total: ~~Keine verwaisten Knoten / Elemente~~.
Zwischen je zwei Elementen besteht mindestens einer der beiden Pfeile.

Ordnungsrelation

Definition

Es sei X eine Menge.

1. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation (R, X, X) auf X heißt eine **Ordnungsrelation**, **Halbordnung** oder **partielle Ordnung**.

   (X, R) heißt dann eine **halbgeordnete Menge**. $R \;\; \precsim$

   $x \precsim x$ für alle $x \in X$

   $x \precsim y$ und $y \precsim x \Rightarrow x = y$

   $x \precsim y$ und $y \precsim z \Rightarrow x \precsim z$

2. Ist R zusätzlich total, dann heißt sie eine **Totalordnung**.

   (X, R) heißt dann eine **totalgeordnete Menge**.

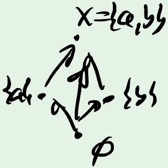
Beispiel

1. Die Inklusionsrelation $\subseteq$ ist eine Halbordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ jeder beliebigen Menge X. Sie ist eine totale Ordnung dann und nur dann, wenn X entweder kein oder genau ein Element enthält. $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$

   $A \subseteq A$ ✓

   $A \subseteq B$ und $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ ✓

   $A \subseteq B$ und $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ ✓



2. Die Teilbarkeitsrelation $\mid$ ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$.

Vergleichbarkeit, obere Schranke, Supremum

Definition

Es sei X mit der Relation $\preccurlyeq$ eine halbgeordnete Menge.

- $x, y \in X$ heißen **vergleichbar**, wenn $x \preccurlyeq y$ oder $y \preccurlyeq x$ gilt.
- $b \in X$ heißt eine **obere Schranke** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$x \preccurlyeq b \quad \text{für alle } x \in A.$$

„Ganz A ist $\preccurlyeq b$"

- $b \in X$ heißt ein **Supremum** oder **kleinste obere Schranke** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

b ist eine obere Schranke von A,

und für jede obere Schranke $\widehat{b}$ von A gilt: $b \preccurlyeq \widehat{b}$.

Definition

Es sei X mit der Relation $\preccurlyeq$ eine halbgeordnete Menge.

- $b \in X$ heißt ein **maximales Element** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

  $b \in A$,

  und für alle $x \in A$ gilt: $b \preccurlyeq x \;\Rightarrow\; x = b$. „Kein El. von A ist größer"

- $b \in X$ heißt ein **Maximum** von $A \subseteq X$, wenn gilt:

  $b \in A$,

  und für alle $x \in A$ gilt: $x \preccurlyeq b$. „Ganz A ist höchstens so groß."

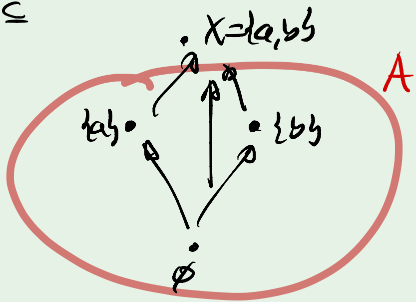
Supremum, maximales Element, Maximum

Beispiel

$[1,2]$: 2 ist Supremum, Maximum und einziges max. El.

$[1,2)$: 2 ist Supremum, kein Maximum, kein max. El.

$\subseteq$



- X ist einzige obere Schranke von A, daher Supremum
- kein Maximum in A
- zwei max. Elemente $\{a\}$, $\{b\}$ in A

Definition

Es sei X eine Menge.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation (R, X, X) auf X heißt eine **Äquivalenzrelation**.

$x \sim x$ für alle $x \in X$

$x \sim y \Rightarrow y \sim x$ für alle $x, y \in X$

$x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Äquivalenzrelation

Beispiel

Kongruenzrelation (auf $\mathbb{Z}$) $x \overset{m}{\equiv} y$ ($m \in \mathbb{N}$) oder $x \equiv y \pmod m$

$:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\ (x - y = nm) \quad :\Leftrightarrow \quad m \mid x - y$

$x \overset{m}{\equiv} x$ ✓, denn $x - x = 0m$

$x \overset{m}{\equiv} y \Rightarrow y \overset{m}{\equiv} x$ ✓, denn $x - y = \underset{\in \mathbb{Z}}{n} m \Rightarrow y - x = \underset{\in \mathbb{Z}}{(-n)} m$

$x \overset{m}{\equiv} y$ und $y \overset{m}{\equiv} z \Rightarrow x \overset{m}{\equiv} z$ ✓,

denn $x - y = nm$, $y - z = km \Rightarrow x - z = \underbrace{(n+k)}_{\in \mathbb{Z}} m$

Äquivalenzklassen und Repräsentanten

Definition

Es sei X eine Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

1. Für $x \in X$ heißt die Menge

$$[x]_\sim \text{ oder } [x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$$

   die **Äquivalenzklasse** von x bzgl. $\sim$.

2. Jedes Element einer Äquivalenzklasse heißt ein **Repräsentant** dieser Äquivalenzklasse.

3. Eine Menge $S \subseteq X$, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten enthält, heißt ein **Repräsentantensystem** von $\sim$.

Beispiel

Kongruenzrelation mod $m = 2$

$[0] = \{ y \in \mathbb{Z} : 0 \overset{2}{\equiv} y \} = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist gerade} \}$
$= 2\mathbb{Z}$

$[1] = \{ y \in \mathbb{Z} : 1 \overset{2}{\equiv} y \} = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist ungerade} \}$
$= 2\mathbb{Z} + 1$

$\shortparallel$
$[-4339]$

$\{0, 1\}$ sind ein Repräsentantensystem von $\overset{2}{\equiv}$.
Es heißt das natürliche Repräsentantensystem.

Äquivalenzklassen sind gleich oder disjunkt

Satz

Es sei X eine Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$ und $[x]$ und $[y]$ zwei Äquivalenzklassen. Dann sind diese entweder gleich oder disjunkt.

Beweis.

$[x]$ und $[y]$ seien nicht disjunkt.

gemeinsames Element von $[x]$ und $[y]$

Es sei $\bar{x} \in [x]$. Dann gilt $\bar{x} \sim x \sim z$

Transitivität: $\bar{x} \sim z$, d.h. $[x] \subseteq [y]$

Analog: $[y] \subseteq [x]$

Es folgt $[x] = [y]$.

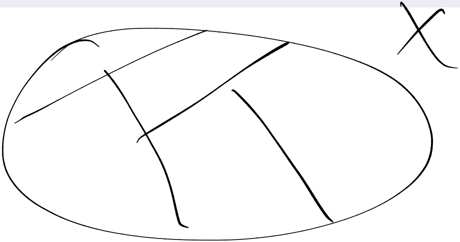
Partition

Definition

Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{U}$ eine Menge von Teilmengen von X, also $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{U}$ heißt eine **Partition** oder **disjunkte Zerlegung** von X, wenn gilt:

„$\mathcal{U}$ überdeckt X"

1. Für alle $x \in X$ gibt es eine Menge $U \in \mathcal{U}$, die x enthält.
2. Für alle $U, V \in \mathcal{U}$ sind U und V entweder gleich oder disjunkt.
3. $\emptyset \notin \mathcal{U}$.



Die „Kacheln" müssen nicht „gleich groß" sein.

Partionen „sind“ Äquivalenzrelationen

Satz

1. Es sei X eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

   Dann bildet die Menge der Äquivalenzklassen $\{[x] \mid x \in X\}$ eine Partition von X.

2. Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{U}$ eine Partition von X.

   Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation $\sim$, sodass $\mathcal{U}$ genau aus den Äquivalenzklassen von $\sim$ besteht.

Beweis: ① Wir starten mit der Äquivalenzrelation $\sim$ auf X. Wir setzen $\mathcal{U} := \{[x] \mid x \in X\}$ als Menge der Äquivalenzklassen und zeigen, dass $\mathcal{U}$ eine Partition ist. Wegen $x \sim x$ ist $x \in [x]$ für alle $x \in X$, also wird X von $\mathcal{U}$ überdeckt. Nach Satz 5.17 sind Äquivalenzklassen paarweise disjunkt. Außerdem sind sie nichtleer. Damit ist $\mathcal{U}$ tatsächlich eine Partition. ② ist Hausaufgabe

Quotientenmenge

Definition

Es sei X eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$.

Die Menge der Äquivalenzklassen

$$X / \sim := \{[x] \mid x \in X\}$$

heißt auch die **Quotientenmenge** oder die **Faktormenge** von $\sim$.

Beispiel

- Die Quotientenmenge $\mathbb{Z} / \overset{2}{\equiv}$ besteht aus den Äquivalenzklassen $[0]$ und $[1]$, also $\mathbb{Z} / \overset{2}{\equiv} = \{[0], [1]\}$.
- Allgemeiner ist $\mathbb{Z} / \overset{m}{\equiv} = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\}$.

Wir hatten die Menge der rationalen Zahlen vorläufig eingeführt als

$$\widetilde{\mathbb{Q}} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Wir wollen aber beispielsweise $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ und $\frac{-2}{-4}$ miteinander identifizieren. Zu diesen Zweck verwenden wir die Äquivalenzrelation

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1.$$

Das führt uns zur Definition

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \Big/ \sim$$

für die **rationalen Zahlen** als Quotientenmenge.

Durch die Äquivalenzrelation ist $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4} \sim \frac{-3}{-6}$ usw.