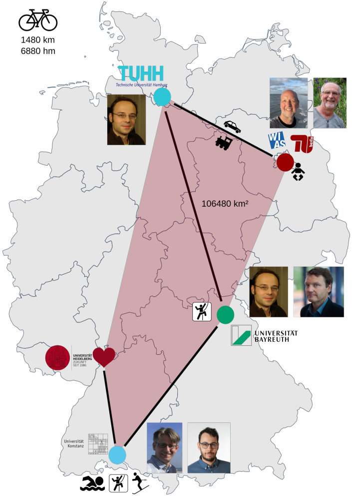
Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 01

Public Service Announcements

- Müsli, Mampf und Gruppenbildung
- Help-Desk
- Wochentaktung
- Nachfragen
- Pause
- Mitschreiben
- Vorkurs
- Musterlösungen
- Kundschaft

Kurzvorstellung



Kenndaten

- 1988 in Berlin geboren
- 2007 – 2013 Studium TU Berlin
- 2013 – 2014 TU Hamburg-Harburg
- 2014 – 2018 Uni Bayreuth
- 2019 Promotion
- 2018 – 2021 Uni Konstanz
- seit 2021 Uni Heidelberg

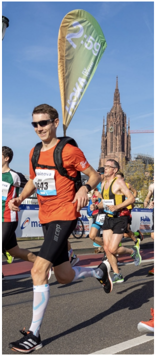
Fachliche Ausrichtung

Optimierung und Scientific Computing

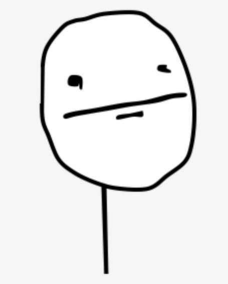
- mit PDEs
- bei Nichtdifferenzierbarkeiten

Ziele der Plenarübung

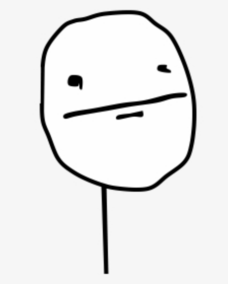
Zwischen Besenwagen und Pacemaker



Das Dozentenproblem



Hab ich schon verstanden.
Laaangweilig.



Ich versteh' nix mehr.
Hiiilfe.

Daher: Umfrage nutzen!

Der Umfragestand am Freitag

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Aufarbeiten von Skriptinhalten Ansehen	10	5.26%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	4	2.11%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	7	3.68%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	176	92.63%
Gesamt(Brutto)	**197**	**100.00%**

Papa, was arbeitest du eigentlich?

Know your audience!

Know your audience

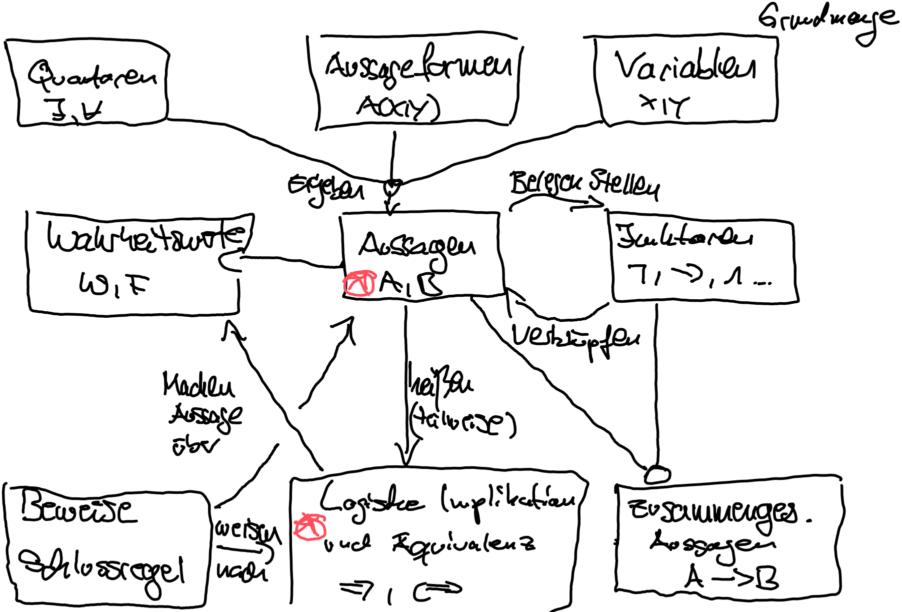
Grundfrage der Kommunikation

Mit wem kommuniziere ich weshalb?

In Ihren Lösungen der Hausaufgaben

Schreiben Sie für Mitstudierende der gleichen Veranstaltung, welche die Hausaufgaben noch nicht bearbeitet haben.

Ein kurzer Überblick über die vergangene Woche



Negierte Junktoren

Als Erweiterung des Schriftsatzes bieten sich an

$\neg(A \Rightarrow B)$

- $(A \nRightarrow B)$ definiert als $\neg(A \Rightarrow B)$, also $A \to B$ keine Tautologie
- $(A \nLeftrightarrow B)$ definiert als $\neg(A \Leftrightarrow B)$, also $A \leftrightarrow B$ keine Tautologie
- $\nexists x\,(A(x))$ definiert als $\neg(\exists x\,(A(x)))$

Werden im Skript vermieden, können in den Übungsaufgaben vorkommen.

Einstellige Junktoren

#Felder = Anzahl der Eingangsbelegungen

Anzahl

Es gibt $2^{(\#\text{Felder})} = 2^2 = 4$ einstellige Junktoren in 2-wertiger Logik

Es gibt $m^{(m^d)}$ d-stellige Junktoren in m-wertiger Logik

Identität

A	$id(A)$
W	W
F	F

m^d Felder

d-Stellen

unwichtig, weil genau A

Negation

A	$\neg A$
W	F
F	W

Der einzige interessante einstellige Junktor

Verum

A	$\top$
W	W
F	W

Falsum

A	$\bot$
W	F
F	F

Unwichtig, weil eigentlich nullstellig

Mathematik

Untersucht Wahrheitswerte von Aussagen unter angenommenen Wahrheiten. (Axiome)

Bindeglied zur Wirklichkeit bzw. Intention (Peano Ax. / Zahlen)

Axiomen

↓

Liefern Argumente

Satz: Es gilt: $1 \neq 2$

Mathematische Themenfelder

Formale Logik

Bspl. Aussagenlogik, Prädikatenlogik

Verwendet Aussagen, Junktoren..

Untersucht Gültigkeit von Schlüssen unabhängig von Wahrheitswerten

Ergebnisse: Schlussregeln anhand von strukturellen Tautologien

$A \vee \neg A$, $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$

"$\to$" verknüpft Aussagen zu zusammengesetzten Aussagen

"$\Rightarrow$" "Macht Aussagen über Wahrheitswerte"

Zusammenhang dieser und der folgenden Wochen

Wichtig

Wir unterscheiden zwischen Aussagen und Aussagen über (den Wahrheitswert) von Aussagen.

Was ist ein mathematischer Satz (Theorem, Lemma,...)?

Ein mathematischer Satz ist eine Aussage über den Wahrheitswert einer Aussage unter Annahme von (Grund-)wahrheiten (Axiome).

Was ist ein Beweis?

Ein Beweis zeigt, wie man aus angenommenen Grundwahrheiten und bereits bewiesenen Folgewahrheiten (Sätze) durch wiederholte Anwendung von Schlussregeln weitere Aussagen logisch folgern kann.

Ausführlicher direkter Beweis

Satz

Für jedes n in $\mathbb{N}$ <u>gilt</u>: Ist n gerade, dann ist $\frac{n}{2}$ in $\mathbb{N}$.

<u>Beweis</u> Zu zeigen ist: $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \text{ gerade} \Rightarrow \frac{n}{2} \in \mathbb{N})$

Also $\forall n \in \mathbb{N}$(n gerade $\to \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ ist Tautologie)

Dann ist (n gerade $\to \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$) ohnehin wahr, wenn ($n$ gerade) falsch ist und wenn wenn ($\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$) wahr ist. Bleibt zu zeigen, dass der Fall (n gerade) und ($\frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$) nicht auftreten kann.

Zukünftig nicht mehr

Sei also $n \in \mathbb{N}$ gerade, dann existiert $m \in \mathbb{N}$, sodass $n = 2m$

Also ist $\frac{n}{2} = m \in \mathbb{N}$ $\square$

"Arbeit"

Hier wurde mittels der Eigensch. von $\mathbb{N}$, die Addition und Multiplikation ausgeschlossen, dass n gerade $\wedge\ \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ auftreten kann.

Satz

Für alle n in $\mathbb{N}$ gilt: $n^7 - n$ durch 7 teilbar.

Beweis. Zu zeigen ist, dass gilt $\forall n \in \mathbb{N}\ \underbrace{\exists m(n) \in \mathbb{Z}\ (n^7 - n = 7m(n))}_{A(n)}$

IA ($n=1$) Für $n=1$ ist $n^7 - n = 1 - 1 = 0 = 7 \cdot \underbrace{0}_{= m(1) \in \mathbb{Z}}$

IS ($n \to n+1$) Ist die Aussage $A(n)$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gezeigt, dann ist (binomische Formel)

$$(n+1)^7 - (n+1) = n^7 + 7n^6 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 7n + 1 - n - 1$$

$$= \underbrace{(n^7 - n)}_{IV(n).\ \exists m(n):\ n^7 - n = 7m(n)} + 7(n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 3n^2 + n)$$

$$= 7\underbrace{(m(n) + n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 3n^2 + n)}_{=: m(n+1) \in \mathbb{Z}}$$

Übersprungen, wird evtl. in Plenarübung 2 aufgegriffen

Beispiel für einen Ringschluss

Satz

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind paarweise äquivalent:

1. Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}\,(f(x) = a)$.
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = f(y)$.
3. Es ist $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

(1) $\Rightarrow$ (3) $\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x)=a) \Rightarrow \min f(x) = a$ und $\max f(x) = a$ weil alle Werte gleich sind

(3) $\Rightarrow$ (2) Seien $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ o.B.d.A. $f(x) \leq f(y)$, dann

$$\min_{z\in\mathbb{R}} f(z) \leq f(x) \leq f(y) \leq \max_{z\in\mathbb{R}} f(z) = \min_{z\in\mathbb{R}} f(z)$$

also $f(x) = f(y) = \min_{z\in\mathbb{R}} f(z) = \max_{z\in\mathbb{R}} f(z)$

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $a = f(x)$. Dann ist $f(y) = f(x) = a \ \forall y \in \mathbb{R}$.

Zu Hausaufgabe 1.1 (und der Vorlesung)

Übersprungen, siehe Musterlösungen

Mit wem kommuniziere ich weshalb?

Für effektive Kommunikation muss ein gemeinsames Verständnis der auftretenden Begrifflichkeiten vorliegen. Die benötigte Genauigkeit des Verständnisses hängt von den Zielen der Kommunikation und den Konsequenzen von Missverständnissen ab.

Alle Kängurus haben Flügel.

Hausaufgabe 1.4 (Assoziativität) (*i*)

Übersprungen, siehe Musterlösungen

Die Bindungsregeln

$$\neg \text{ bindet stärker als } \wedge \text{ bindet stärker als } \vee$$
$$\text{bindet stärker als } \rightarrow \text{ bindet stärker als } \leftrightarrow$$

führen zu einer Lesart komplexer Ausdrücke von Innen nach Außen, z. B.:

$$A_1 \vee \neg A_2 \wedge A_3 \rightarrow \neg A_4 \wedge A_5 \leftrightarrow \neg \neg A_6 \rightarrow A_7 \vee A_8$$

Hausaufgabe 1.4 (Assoziativität) (*ii*)

Übersprungen, siehe Musterlösungen

Um Assoziativität eines Junktors $\star$ zu zeigen, müssen wir beweisen, dass für Aussagen A,B und C die Ausdrücke $(A \star B) \star C$ und $A \star (B \star C)$ die gleichen Wahrheitstafeln haben.

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \to C$	$A \to (B \to C)$
W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F
W	F	W	F	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W
F	F	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	F	W

Hausaufgabe 1.5 Symbolisierung mit Quantoren

Übersprungen, siehe Musterlösungen

Symbolisieren Sie für die nichtleere Grundmenge aller Personen mit

$$\begin{aligned} A(x) &: x \text{ ist Arbeitnehmer} \\ K(x,y) &: x \text{ kennt } y \\ S(x,y) &: x \text{ arbeitet für } y \end{aligned}$$

1. Wer für niemanden arbeitet, ist kein Arbeitnehmer.
2. Jeder Arbeitnehmer kennt jemanden, für den jemand arbeitet.
3. Nicht alle Arbeitnehmer, die sich kennen, arbeiten für einen gleichen Arbeitgeber.
4. Es gibt g.e. Arbeitgeber, der keinen seiner Arbeitnehmer kennt.

Hausaufgabe 1.6 d)

Übersprungen, siehe Musterlösungen

Aussage: $\forall x\,\exists y\,\forall z\,\big((C(x,y,z) \vee A(z)) \wedge B(x,y)\big)$

Schrittweise Negation und Vereinfachung:

$$
\begin{aligned}
&\neg\left(\forall x\,\exists y\,\forall z\,\big((C(x,y,z) \vee A(z)) \wedge B(x,y)\big)\right) \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\,\neg\left(\exists y\,\forall z\,\big((C(x,y,z) \vee A(z)) \wedge B(x,y)\big)\right) \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\,\forall y\,\neg\left(\forall z\,\big((C(x,y,z) \vee A(z)) \wedge B(x,y)\big)\right) \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\,\forall y\,\exists z\,\neg\big((C(x,y,z) \vee A(z)) \wedge B(x,y)\big) \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\,\forall y\,\exists z\,\big(\neg(C(x,y,z) \vee A(z)) \vee \neg B(x,y)\big) \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\,\forall y\,\exists z\,\big(\neg C(x,y,z) \wedge \neg A(z) \vee \neg B(x,y)\big).
\end{aligned}
$$

All-at-once Negation: