Plenarübung Lineare Algebra I

(Inhalts)-Woche 01

Ein kurzer Überblick über die vergangene Woche

Negierte Junktoren

Als Erweiterung des Schriftsatzes bieten sich an

- $(A \nRightarrow B)$ definiert als $\neg(A \Rightarrow B)$, also $A \to B$ keine Tautologie
- $(A \nLeftrightarrow B)$ definiert als $\neg(A \Leftrightarrow B)$, also $A \leftrightarrow B$ keine Tautologie
- $\nexists x\,(A(x))$ definiert als $\neg(\exists x\,(A(x)))$

Werden im Skript vermieden, können in den Übungsaufgaben vorkommen.

Einstellige Junktoren

Anzahl

Es gibt 4 einstellige Junktoren

A	
W	
F	

A	
W	
F	

A	
W	
F	

A	
W	
F	

Die Aufgaben materialer und logischer (Bi-)konditionale

Zusammenhang dieser und der folgenden Wochen

Wichtig

Wir unterscheiden zwischen Aussagen und Aussagen über (den Wahrheitswert) von Aussagen.

Was ist ein mathematischer Satz (Theorem, Lemma,. . .)?

Ein mathematischer Satz ist eine Aussage über den Wahrheitswert einer Aussage unter Annahme von (Grund-)wahrheiten (Axiome).

Was ist ein Beweis?

Ein Beweis zeigt, wie man aus angenommenen Grundwahrheiten und bereits bewiesenen Folgewahrheiten (Sätze) durch wiederholte Anwendung von Schlussregeln weitere Aussagen logisch folgern kann.

Ausführlicher direkter Beweis

Satz

Für jedes n in $\mathbb{N}$ gilt: Ist n gerade, dann ist $\frac{n}{2}$ in $\mathbb{N}$.

Induktionsbeweise - Teilbarkeit

Satz

Für alle n in $\mathbb{N}$ gilt: $n^7 - n$ durch 7 teilbar.

Beispiel für einen Ringschluss

Satz

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind paarweise äquivalent:

1. Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}\,(f(x) = a)$.
2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = f(y)$.
3. Es ist $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \max_{x\in\mathbb{R}} f(y)$.

Zu Hausaufgabe 1.1 (und der Vorlesung)

Mit wem kommuniziere ich weshalb?

Für effektive Kommunikation muss ein gemeinsames Verständnis der auftretenden Begrifflichkeiten vorliegen. Die benötigte Genauigkeit des Verständnisses hängt von den Zielen der Kommunikation und den Konsequenzen von Missverständnissen ab.

Alle Kängurus haben Flügel.

Hausaufgabe 1.4 (Assoziativität) (i)

Die Bindungsregeln

$$\neg \text{ bindet stärker als } \wedge \text{ bindet stärker als } \vee$$
$$\text{bindet stärker als } \rightarrow \text{ bindet stärker als } \leftrightarrow$$

führen zu einer Lesart komplexer Ausdrücke von Innen nach Außen, z. B.:

$$A_1 \vee \neg A_2 \wedge A_3 \rightarrow \neg A_4 \wedge A_5 \leftrightarrow \neg \neg A_6 \rightarrow A_7 \vee A_8$$

Hausaufgabe 1.4 (Assoziativität) (*ii*)

Um Assoziativität eines Junktors $\star$ zu zeigen, müssen wir beweisen, dass für Aussagen A,B und C die Ausdrücke $(A \star B) \star C$ und $A \star (B \star C)$ die gleichen Wahrheitstafeln haben.

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \to C$	$A \to (B \to C)$
W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F
W	F	W	F	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W
F	F	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	F	W

Hausaufgabe 1.5 Symbolisierung mit Quantoren

Symbolisieren Sie für die nichtleere Grundmenge aller Personen mit

$$\begin{aligned} A(x) &: x \text{ ist Arbeitnehmer} \\ K(x,y) &: x \text{ kennt } y \\ S(x,y) &: x \text{ arbeitet für } y \end{aligned}$$

1. Wer für niemanden arbeitet, ist kein Arbeitnehmer.
2. Jeder Arbeitnehmer kennt jemanden, für den jemand arbeitet.
3. Nicht alle Arbeitnehmer, die sich kennen, arbeiten für einen gleichen Arbeitgeber.
4. Es gibt g.e. Arbeitgeber, der keinen seiner Arbeitnehmer kennt.

Hausaufgabe 1.6 d)

Aussage: $\forall x\, \exists y\, \forall z\, \big((C(x,y,z) \vee A(z)) \wedge B(x,y)\big)$

Schrittweise Negation und Vereinfachung:

$$
\begin{aligned}
&\neg\, \big(\forall x\, \exists y\, \forall z\, \big((C(x,y,z) \vee A(z)) \wedge B(x,y)\big)\big)\\
\Leftrightarrow\, &\exists x\, \neg\, \big(\exists y\, \forall z\, \big((C(x,y,z) \vee A(z)) \wedge B(x,y)\big)\big)\\
\Leftrightarrow\, &\exists x\, \forall y\, \neg\, \big(\forall z\, \big((C(x,y,z) \vee A(z)) \wedge B(x,y)\big)\big)\\
\Leftrightarrow\, &\exists x\, \forall y\, \exists z\, \neg\big((C(x,y,z) \vee A(z)) \wedge B(x,y)\big)\\
\Leftrightarrow\, &\exists x\, \forall y\, \exists z\, \big(\neg(C(x,y,z) \vee A(z)) \vee \neg B(x,y)\big)\\
\Leftrightarrow\, &\exists x\, \forall y\, \exists z\, \big(\neg C(x,y,z) \wedge \neg A(z) \vee \neg B(x,y)\big).
\end{aligned}
$$

All-at-once Negation: