Lineare Algebra I

Woche 01

17.10.2023 und 19.10.2023

Was ist (lineare) Algebra?

- **Algebra** (von arabisch الجبر, *al-ğabr*, „das Zusammenfügen gebrochener Teile")
- Ursprung in der Beschreibung von Lösungsverfahren linearer und quadratischer Gleichungen
- In der heutigen Bedeutung geht es um Strukturen, Abbildungen zwischen Strukturen und die in ihnen geltenden „Rechen"regeln
- Speziell die **lineare Algebra** befasst sich mit „linearen Strukturen", das sind vor allem Vektorräume, Abbildungen zwischen Vektorräumen und lineare Gleichungssysteme.

Aussagen

Definition

Eine **Aussage** ist ein Satz (einer Sprache), dem eindeutig

- entweder der **Wahrheitswert wahr** (kurz: W oder $\top$)
- oder der **Wahrheitswert falsch** (kurz: F oder $\perp$)

zugeordnet werden kann.

Der Satz kann dabei der gewöhnlichen Sprache oder der mathematischen Sprache entstammen.

Wir bezeichnen Aussagen in der Regel mit Großbuchstaben wie A, B usw.

Aussagen?

Beispiel

1. A: 9 ist durch 3 teilbar.
   wahre Aussage
2. B: Die Hauptstadt von Frankreich ist London.
   am 17.10.2023
   falsche Aussage
3. C: München ist 781 km von Hamburg entfernt.
   keine Aussage, zu ungenau
4. D: Das Team des VfL Wolfsburg wird in der Saison 2023/24 deutscher Meister in der Frauen-Fußball-Bundesliga.
   Aussage, Wahrheitswert noch nicht bekannt
5. E: Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.
   Aussage, Wahrheitswert noch nicht bekannt

Junktoren

- Ein **Junktor** verknüpft (eine oder zwei) Aussagen zu einer neuen Aussage.
- Der Wahrheitswert der neuen Aussage ergibt sich aus den Wahrheitswerten der miteinander verknüpften Aussagen.
- Wir definieren einen Junktor über seine **Wahrheitswerttabelle** oder **Wahrheitstafel**.

einstellig

Die Operation $\neg A$ (sprich: „nicht A“) heißt **Negation**.

$\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist.

A	$\neg A$
W	F
F	W

Es gibt 4 einstellige Junktoren.

Junktor: Konjunktion (Und-Verknüpfung)

zweistellig

Die Operation $A \wedge B$ (sprich: „A **und** B“) heißt **Konjunktion**.

$A \wedge B$ ist dann wahr, wenn A und B beide wahr sind, ansonsten falsch.

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Junktor: Disjunktion (Oder-Verknüpfung)

Die Operation $A \lor B$ (sprich: „A **oder** B“) heißt **Disjunktion**.

$A \lor B$ ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist, ansonsten falsch. Das „Oder“ ist also in einem nicht-ausschließenden Sinne gemeint.

A	B	$A \lor B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Junktor: Implikation (Wenn-Dann-Verknüpfung) Konditional

Die Aussage $A \to B$ ist über die Wahrheitswerttabelle unten definiert. Wir sagen auch:

- „A ist **hinreichend** für B",
- „B ist **notwendig** für A",
- „A impliziert B",
- „Wenn A, dann B".

A heißt auch das **Antezedens** und B das **Konsequens**.

A	B	$A \to B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Junktor: Äquivalenz (Genau-Dann-Wenn-Verknüpfung)

Bikonditional

Die Aussage $A \leftrightarrow B$ ist wahr, wenn entweder A und B beide wahr oder beide falsch sind, ansonsten falsch. Wir sagen auch:

- „A ist **notwendig und hinreichend** für B",
- „A ist äquivalent zu B",
- „A genau dann, wenn B",
- „A dann und nur dann, wenn B".

A	B	$A \leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Sätze der Umgangssprache

Beispiel

exklusiv gemeint

1. Zum Burger servieren wir Pommes oder Salat.
   P: Zum Burger servieren wir Pommes.
   S: Zum Burger servieren wir Salat.

   - $(P \vee S) \wedge (\neg (P \wedge S))$
   - $(P \wedge (\neg S)) \vee (S \wedge (\neg P))$

2. Obwohl Barbara energisch ist, ist sie nicht sportlich.
   E: Barbara ist energisch.
   S: Barbara ist sportlich.

   - $E \wedge (\neg S)$

Sätze der Umgangssprache

Beispiel

3. Du wirst keine Suppe bekommen, aber dafür den Salat.
   S_1: Du wirst Suppe bekommen.
   S_2: Du wirst Salat bekommen.
   $(\neg S_1) \wedge S_2$

4. Du wirst Dich erkälten, es sei denn, Du trägst eine Jacke.
   J: Du trägst eine Jacke.
   E: Du wirst Dich erkälten.

- $(\neg J) \to E$
- $J \vee E$

An den Beispielen sieht man, dass unter der formalen Symbolisierung Nuancen der Sprache zugunsten der Präzision verloren gehen.

Umschreibung der Implikation $\to$

Lemma

Die Aussagen

- $A \to B$
- $(\neg A) \vee B$
- $(\neg B) \to (\neg A)$

haben dieselben Wahrheitstafeln.

Beweis. Wir stellen die Wahrheitstafeln für die drei Aussagen auf:

A	B	$A \to B$	$(\neg A) \vee B$	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \to (\neg A)$
W	W	W	W	F	F	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Umschreibung der Äquivalenz $\leftrightarrow$

Lemma = Hilfssatz

Die Aussagen

- $A \leftrightarrow B$
- $(A \to B) \land (B \to A)$

haben dieselben Wahrheitstafeln.

Beweis. Der Beweis ist Teil von Hausaufgabe 1.3.

Bindungsregeln

Es bindet ...

$$\neg \text{ stärker als } \wedge \text{ stärker als } \vee \text{ stärker als } \rightarrow \text{ stärker als } \leftrightarrow$$

Diese Regeln erlauben uns, auf Klammern zu verzichten. Klammern können jedoch zur Verdeutlichung nicht schaden.

Beispiel

$$(\neg A) \wedge B \quad \text{ist dasselbe wie} \quad \neg A \wedge B$$

$$(\neg(A \wedge B)) \rightarrow (B \vee (\neg B)) \quad \text{ist dasselbe wie} \quad \neg(A \wedge B) \rightarrow B \vee \neg B$$

Logische Implikation $\Rightarrow$

Für Aussagen A und B bedeutet die **logische Implikation**

$$A \;\Rightarrow\; B \qquad \text{(lies: „}A\text{ impliziert }B\text{“)},$$

dass $\boxed{A \to B}$ in allen Fällen den Wahrheitswert W hat, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte die Aussagen A und B haben.

Man sagt auch, dass $\boxed{A \to B}$ eine **Tautologie** ist.

A	B	$A \to B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

← Dieser Fall wird ausgeschlossen!

Logische Implikation $\Rightarrow$

Beispiel $(A \to B) \wedge \neg B \to \neg A$ ist wahr

$(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$, denn:

A	B	$(A \to B) \wedge \neg B$	$\neg A$	$(A \to B) \wedge \neg B \to \neg A$
W	W	F	F	W
W	F	F	F	W
F	W	F	W	W
F	F	W	W	W

Logische Äquivalenz $\Leftrightarrow$

Für Aussagen A und B bedeutet die **logische Äquivalenz**

$$A \Leftrightarrow B \qquad \text{(lies: „}A\text{ ist äquivalent zu }B\text{“)},$$

dass $\boxed{A \leftrightarrow B}$ in allen Fällen den Wahrheitswert W hat, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte die Aussagen A und B haben.

Man sagt auch, dass $A \leftrightarrow B$ eine **Tautologie** ist.

A	B	$A \leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Diese Fälle sind ausgeschlossen

Logische Äquivalenz $\Leftrightarrow$

Beispiel $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ ist wahr

$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee \neg B$, denn:

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
W	W	F	F	W
W	F	W	W	W
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

Sammlung von Implikationen und Äquivalenzen

Für komplexere Aussagen ist das Ausfüllen einer Wahrheitswerttabelle nicht zielführend. Stattdessen sammeln wir einen Katalog von Tautologien, die wir als Schlussregeln in Beweisen anwenden können.

Beispiel

$$(A \to B) \land (B \to C) \;\Rightarrow\; (A \to C)$$
$$(A \to B) \land A \;\Rightarrow\; B$$
$$A \land B \;\Rightarrow\; A$$

„Wenn n eine gerade ganze Zahl ist, dann ist auch n^2 eine gerade ganze Zahl.“ ist keine Aussage im Sinne der Aussagenlogik.

Definition

Eine **Aussageform** oder ein **Prädikat** ist ein sprachliches Gebilde mit Variablen (Leerstellen), die nach Einsetzen der Variablen in Aussagen übergehen.

Beispiel

$A(y)$: y wohnt in Aachen

$$A(x) : x \text{ wohnt in Aachen.}$$

$$Z(x) : x \text{ ist eine gerade ganze Zahl.}$$

zweistellig

$$G(x, y) : x \text{ ist mindestens so groß wie } y.$$

Stelligkeit = Anzahl der Variablen

Quantoren

Definition

$\forall$	für alle (**Allquantor**)
$\exists$	es existiert (mindestens) ein (**Existenzquantor**)
$\exists!$	es existiert genau ein (**Eindeutigkeitsquantor**)

Zu jedem Quantor gehört eine Variable und ein **Grundbereich**.

Beispiel

Grundbereich

$\forall x \in \mathbb{N}\ (x \geqslant 0)$ „Alle natürlichen Zahlen sind nichtnegativ.“

$\forall x \in \mathbb{R}\ (x \geqslant 0)$ „Alle reellen Zahlen sind nichtnegativ.“

Sätze der Umgangssprache mit Quantoren

$$E(x): x \text{ hat } 100\,000 \text{ oder mehr Einwohner}$$

$$S(x): x \text{ ist eine Stadt}$$

Grundbereich O = Menge aller Orte in Deutschland

Beispiel

- Es gibt mindestens eine Stadt in Deutschland, die 100 000 oder mehr Einwohner hat.

  $\exists x \in O \, (S(x) \wedge E(x))$ $\qquad$ $\exists x \in O: \; S(x) \wedge E(x)$

- Es gibt genau einen Ort in Deutschland, der 100 000 oder mehr Einwohner hat, aber keine Stadt ist.

  $\exists! x \in O \, (E(x) \wedge \neg S(x))$

Sätze der Umgangssprache mit Quantoren

$E(x)$: x hat 100 000 oder mehr Einwohner

$S(x)$: x ist eine Stadt

Beispiel

- Alle Städte in Deutschland haben 100 000 oder mehr Einwohner.

  $\forall y \in O \, (S(y) \to E(y))$

- Keine Stadt in Deutschland hat 100 000 oder mehr Einwohner.

  $\neg \exists x \in O \, (E(x) \wedge S(x))$ $\quad$ $\forall x \in O (\underbrace{\neg (E(x) \wedge S(x))}_{\neg E(x) \vee \neg S(x)})$

$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

$E(x) \to \neg S(x)$

$S(x) \to \neg E(x)$

Sammlung von Implikationen und Äquivalenzen

Auch für Aussageformen mit Quantoren gibt es logische Implikationen und Äquivalenzen:

Satz

$$
\begin{aligned}
\neg(\forall x\, A(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x\, (\neg A(x)) \\
\neg(\exists x\, A(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x\, (\neg A(x)) \\[1ex]
\forall x\, \forall y\, C(x,y) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall y\, \forall x\, C(x,y) \\
\exists x\, \exists y\, C(x,y) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists y\, \exists x\, C(x,y) \\[1ex]
\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) \\
\exists x\, (A(x) \vee B(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)
\end{aligned}
$$

Sammlung von Implikationen und Äquivalenzen

Auch für Aussageformen mit Quantoren gibt es logische Implikationen und Äquivalenzen:

Satz

$$
\begin{aligned}
\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \quad &\Rightarrow \quad \forall x\, (A(x) \vee B(x)) \\
\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \quad &\Rightarrow \quad \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x) \\[1ex]
\forall x\, (A(x) \to B(x)) \quad &\Rightarrow \quad (\forall x\, A(x)) \to (\forall x\, B(x)) \\
\exists x\, (A(x) \to B(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x\, A(x)) \to (\exists x\, B(x))
\end{aligned}
$$

Die letzte Äquivalenz sieht suspekt aus, ist aber richtig!

$$\exists x\, (A(x) \to B(x)) \iff \exists x\, (\neg A(x) \vee B(x))$$

$$\iff (\exists x\, (\neg A(x))) \vee (\exists x\, (B(x))) \iff \neg(\exists x\, (\neg A(x))) \to (\exists x (B(x)))$$

$$\iff (\forall x (\neg\neg A(x))) \to (\exists x\, (B(x)))$$

Was ist ein Beweis?

- In einem Beweis versuchen wir in der Regel, für gegebene Aussagen A, B die Implikation $A \Rightarrow B$ nachzuweisen. Das heißt, wir müssen nachweisen, dass $A \to B$ eine Tautologie ist.
- Meistens besteht die Prämisse A selbst aus einer Konjunktion (Und-Verknüpfung) mehrerer einzelner Prämissen.
- Nicht alle Prämissen werden in der Formulierung eines mathematischen Satzes explizit genannt. Beispielsweise wird man die als wahr geltenden Grundannahmen (Axiome) über die reellen Zahlen nicht jedes Mal explizit erwähnen.

Beweismuster

- Beim **direkten Beweis** wird $A \Rightarrow B$, typischerweise unter Verwendung von Axiomen und bereits bewiesenen Sätzen, direkt mit Hilfe von Schlussregeln hergeleitet.

- Beim **indirekten Beweis** oder **Beweis durch Kontraposition** nutzen wir die Äquivalenz

$$(A \rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg B \rightarrow \neg A)$$

  aus. Wir führen also einen direkten Beweis für $\neg B \Rightarrow \neg A$.

- Beim **Widerspruchsbeweis** nutzen wir die Äquivalenz

$$(A \rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (A \wedge \neg B) \rightarrow \perp$$

  aus.

direkter Beweis

Satz

Für $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ gelte $m^2 < n^2$, dann gilt auch $m < n$.

$A(m,n): m^2 < n^2$ $\qquad B(m,n): m < n$

$$
\begin{aligned}
& \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (A(m,n)) \\
\Rightarrow\ & \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (m^2 < n^2) \\
\Rightarrow\ & \text{———''———}\ (0 < n^2 - m^2) \\
\Rightarrow\ & \text{———''———}\ (0 < (n-m)\underbrace{(n+m)}_{>0}) \\
\Rightarrow\ & \text{———''———}\ (0 < n-m) \\
\Rightarrow\ & \text{———''———}\ (m < n) \\
\Rightarrow\ & \text{———''———}\ B(m,n)
\end{aligned}
$$

Korrektur: Hier wird nicht die gewünschte Aussage bewiesen. Berichtigung s

direkter Beweis

Satz

Für $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ gelte $m^2 < n^2$, dann gilt auch $m < n$.

Beweis. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m^2 < n^2$. Dann gilt auch $0 < n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$. Die Division durch die positive Zahl $n + m$ ergibt $0 < n - m$, also auch $m < n$, was zu zeigen war.

indirekter Beweis (Beweis durch Kontraposition)

Satz

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $4^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist notwendig n ungerade.

Kontraposition der Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n gerade ist, dann ist $4^n - 1$ keine Primzahl.

Beweis. Es sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, also gilt $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

$4^n - 1 = 4^{2k} - 1 = (\underbrace{4^k - 1}_{>1})(\underbrace{4^k + 1}_{>1})$, d.h.

$4^n - 1$ ist nicht prim.

Beweismuster

- Beim **Beweis durch Fallunterscheidung** nutzen wir die Äquivalenz

$$(A \wedge C \to B) \wedge (A \wedge \neg C \to B) \quad \Leftrightarrow \quad A \to B.$$

Dabei ist C irgendeine weitere Aussage.

Wir nehmen also zunächst die Aussagen A und C als wahr an und zeigen, dass dann auch die Aussage B wahr ist.

Anschließend nehmen wir die Aussage A weiterhin als wahr aber die Aussage C als falsch an und zeigen, dass dann wiederum die Aussage B wahr ist.

Beweis durch Fallunterscheidung

Satz

Für $n \in \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ gilt: $n^2 + n$ ist gerade.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: n ist ungerade

$n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

$$n^2+n = (2k+1)^2 + (2k+1) = 4k^2+4k+1+2k+1$$
$$= 4k^2+6k+2 = 2(\underbrace{2k^2+3k+1}_{\in \mathbb{Z}}), \text{ also gerade.}$$

Fall 2: n ist gerade

$n = 2k$ für $k \in \mathbb{Z}$

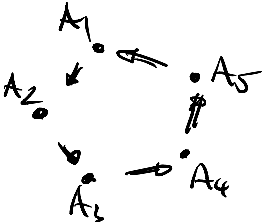
$$n^2+n = 4k^2+2k = 2(\underbrace{2k^2+k}_{\in \mathbb{Z}}), \text{ also gerade.}$$

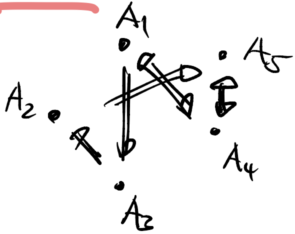
Beweismuster

- Hat der zu zeigende Satz die Form $A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_n$, so können wir einen **Beweis durch Ringschluss** nutzen.

  Bei diesem zeigen wir nacheinander die Implikationen $A_1 \Rightarrow A_2$, $A_2 \Rightarrow A_3$ usw. bis $A_{n-1} \Rightarrow A_n$ und $A_n \Rightarrow A_1$. Das erfordert n Beweisschritte.

  Wir können sogar allgemeiner solange verschiedene Implikationen $A_i \Rightarrow A_j$ zeigen, bis wir mittels Kettenschluss von jeder der beteiligten Aussagen zu jeder anderen Aussage gelangen können.





Beweis durch vollständige Induktion

- Hat der zu zeigende Satz die Form „$A(n)$ für all $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant n_0$“, können wir einen **Beweis durch vollständige Induktion** nutzen.

  In diesem Fall zeigen wir am **Induktionsanfang** die Wahrheit der Aussage $A(n_0)$.

  Induktionsannahme: $A(n)$ sei wahr.

  Im **Induktionsschritt** wird $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

  Bei Bedarf kann im Induktionsschritt sogar auf alle vorgehenden Aussagen $A(\cancel{1}\,n_0), \dots, A(n)$ zurückgegriffen werden, also $A(\cancel{1}\,n_0) \wedge \dots \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt werden.

Satz

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A(n): \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2} n \, (n+1).$$

Beweis. $n_0 = 1$: $A(1)$: $\sum_{j=1}^{1} j = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) \Leftrightarrow 1 = 1$ ✓

Es gelte $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

$A(n+1)$ ist zu zeigen:

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = n+1 + \sum_{j=1}^{n} j = n+1 + \underline{\frac{1}{2} n (n+1)}$$

$$= (n+1) \left(1 + \frac{1}{2} n\right) = (n+1) \frac{2+n}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (n+1)(n+2)$$