Übung 13

Ausgabedatum: 29. Januar 2024
Abgabedatum: 5. Februar 2024

Hausaufgabe 13.1 (Basics zu Dimensionssätzen) 1.5 + 1.5 + 3 = 6 Punkte

(a) Gegeben seien die unten stehenden Paare von Vektorräumen V und Unterräumen U. Bestimmen Sie zu jedem Paar mit Hilfe des Dimensionssatzes für Faktorräume $\operatorname{codim}(U)$ oder erklären Sie, warum anhand dessen keine Aussage möglich ist.

(i) $V := (\mathbb{Z}_3)^{3\times 3}$ mit den Matrixverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$, $U := \{A \in V \mid \operatorname{Kern}(A) \supseteq \langle e_1, e_3 \rangle\}$

(ii) $V := (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$ mit den Funktionsverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, $U := \{f \in V \mid f(2\mathbb{N}) = \{0\}\}$

(iii) $V := \mathbb{Q}[t]$ mit den Polynomverknüpfungen über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $U := \{p \in V \mid \deg(p) \leq 10$ und der Koeffizient vor t^0 ist Null$\}$

(b) Gegeben seien die unten stehenden Vektorraumhomomorphismen $f\colon V \to W$ zwischen Vektorräumen über demselben Körper. Bestimmen Sie in jeder Teilaufgabe den Rang und den Defekt von f. Wenden Sie in jeder Teilaufgabe einmal den Dimensionssatz für Vektorraumhomomorphismen an.

(i) $V := \mathbb{Q}_5[t]$, $W := \mathbb{Q}_6[t]$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $f\left(\sum_{k=0}^{5} a_k t^k\right) := a_0 t^3$

(ii) $V := \mathbb{R}^{[\![0,3]\!]}$, $W := \mathbb{R}^{[\![0,3]\!]}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $f := \operatorname{id}$

(iii) $V := \mathbb{R}^{2\times 3}$, $W := \mathbb{R}^{3\times 3}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $f(A) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A$

(c) (i) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ drei Vektorräume über K sowie

$f: U \to V$, $g: V \to W$ Homomorphismen. Zeigen Sie, dass

$$\dim(\mathrm{Bild}(g \circ f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(g)) = \dim(\mathrm{Bild}(f))$$

gilt.

(ii) Gegeben Sei die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie Teilaufgabe (i) um $\dim(\mathrm{Bild}(f \circ f))$ zu bestimmen.

Hausaufgabe 13.2 (Charakterisierung der Bijektivität von Homomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume) 3.5 + 2.5 = 6 Punkte

(a) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K sowie $f: V \to W$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie Folgerung 18.8, also die folgenden Aussagen:

(i) Haben V und W dieselbe endliche Dimension $\dim(V) = \dim(W)$, dann sind äquivalent:

(1) f ist injektiv.

(2) $\mathrm{Defekt}(f) = 0$.

(3) f ist surjektiv.

(4) $\mathrm{Rang}(f) = \dim(V)$.

(5) f ist bijektiv.

(ii) Ist V endlich-dimensional und gilt $\dim(V) < \dim(W) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht surjektiv sein.

(iii) Ist W endlich-dimensional und gilt $\dim(W) < \dim(V) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht injektiv sein.

(iv) Es sei V oder W endlich-dimensional. Ein Isomorphismus $V \to W$ existiert genau dann, wenn der andere Vektorraum auch endlich-dimensional ist und $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

(b) Gegeben seien die unten stehenden Paare von Vektorräumen V und W über demselben Körper. Welche Aussagen können Sie bezüglich der Injektivität und Surjektivität einer linearen Abbildung $f \colon V \to W$ anhand des obigen Satzes machen?

(i) $V \coloneqq K^3$, $W \coloneqq K_4$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$

(ii) $V \coloneqq K_4$, $W \coloneqq K^3$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$

(iii) $V \coloneqq \mathbb{Q}_2[t]$, $W \coloneqq \mathbb{R}_2[t]$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

(iv) $V \coloneqq \mathbb{Q}_2[t]$, $W \coloneqq \mathbb{Q}_2[t]$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

(v) $V \coloneqq (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$, $W \coloneqq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

Hausaufgabe 13.3 (Koordinatendatendarstellung von Vektoren) 0.5 + 0.5 + 1 = 2 Punkte

Gegeben seien die folgenden Kombinationen von Vektorräumen V mit Basen B und Vektoren $v \in V$. Bestimmen Sie für jede Kombination die Koordinatendarstellung von v bzgl. B. Woraus bestehen die Spalten der Koeffizientenmatrizen der dazugehörigen linearen Gleichungssysteme?

(a) $V \coloneqq \mathbb{R}_3[t]$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $B \coloneqq (1, 1+t, 1+t^2, 1+t^3)$, $v \coloneqq 0 + 1t + 2t^2 + 3t^3$

(b) $V \coloneqq \mathbb{R}^{[\![1,4]\!]}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $B \coloneqq (k e_k)_{k \in [\![1,4]\!]}$, $v \coloneqq \mathrm{id}$

(c) $V \coloneqq \mathbb{Q}_5[t] \,/\, \langle 1, t^2, t^4 \rangle$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $B \coloneqq ([t - t^3], [8\,t - 7\,t^3], [t^5])$, $v \coloneqq [1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5]$

Hausaufgabe 13.4 (Darstellungsmatrizen) 2.5 + 2.5 = 5 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen aus Hausaufgabe 12.1 Teilaufgabe (a) und Hausaufgabe 13.1 Teilaufgabe (b), sofern dies möglich ist, jeweils bzgl. der Standardbasen der entsprechenden Vektorräume.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der unten stehenden linearen Abbildung

(i) $(\mathcal{P}([\![1,3]\!]), \triangle, \cdot) \ni M \mapsto M \cap \{1,3\} \in (\mathcal{P}([\![1,4]\!]), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ bzgl. der Basen

$$(\{1,2,3\},\ \{1,3\},\ \{1\ \cancel{2}\}) \quad \text{und} \quad (\{1,2\},\ \{2\},\ \{3,4\},\ \{4\}).$$

(ii) $(\mathcal{P}([\![1,4]\!]), \triangle, \cdot) \ni M \mapsto e_M \in ((\mathbb{Z}_2)^{[\![1,5]\!]}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ bzgl. der Basen

$$(\{1,2\},\ \{2\},\ \{3,4\},\ \{4\}) \quad \text{und} \quad (e_1,\ e_1 + e_2,\ e_2 + e_3,\ e_3 + e_4,\ e_4 + e_5),$$

wobei e_M die Elemente aus M auf 1 und jedes andere Argument auf 0 abbildet.

(iii) Die Komposition der beiden obigen Abbildungen bzgl. der Basen

$$(\{1, 2, 3\},\ \{1, 3\},\ \{1\ \cancel{2}\}) \quad \text{und} \quad (e_1,\ e_1 + e_2,\ e_2 + e_3,\ e_3 + e_4,\ e_4 + e_5).$$

Hinweis: Hier können Sie sich mit einem Resultat aus dem Skript den Großteil der Arbeit sparen.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.