Übung 13 - Lösung

Ausgabedatum: 29. Januar 2024
Abgabedatum: 5. Februar 2024

Hausaufgabe 13.1 (Basics zu Dimensionssätzen) 1.5 + 1.5 + 3 = 6 Punkte

(a) Gegeben seien die unten stehenden Paare von Vektorräumen V und Unterräumen U. Bestimmen Sie zu jedem Paar mit Hilfe des Dimensionssatzes für Faktorräume $\operatorname{codim}(U)$ oder erklären Sie, warum anhand dessen keine Aussage möglich ist.

(i) $V := (\mathbb{Z}_3)^{3\times 3}$ mit den Matrixverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$, $U := \{A \in V \mid \operatorname{Kern}(A) \supseteq \langle e_1, e_3\rangle\}$

(ii) $V := (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$ mit den Funktionsverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, $U := \{f \in V \mid f(2\mathbb{N}) = \{0\}\}$

(iii) $V := \mathbb{Q}[t]$ mit den Polynomverknüpfungen über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $U := \{p \in V \mid \deg(p) \leq 10$ und der Koeffizient vor t^0 ist Null$\}$

(b) Gegeben seien die unten stehenden Vektorraumhomomorphismen $f\colon V \to W$ zwischen Vektorräumen über demselben Körper. Bestimmen Sie in jeder Teilaufgabe den Rang und den Defekt von f. Wenden Sie in jeder Teilaufgabe einmal den Dimensionssatz für Vektorraumhomomorphismen an.

(i) $V := \mathbb{Q}_5[t]$, $W := \mathbb{Q}_6[t]$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $f\left(\sum_{k=0}^{5} a_k t^k\right) := a_0 t^3$

(ii) $V := \mathbb{R}^{[\![0,3]\!]}$, $W := \mathbb{R}^{[\![0,3]\!]}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $f := \operatorname{id}$

(iii) $V := \mathbb{R}^{2\times 3}$, $W := \mathbb{R}^{3\times 3}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $f(A) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A$

(c) (i) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ drei Vektorräume über K sowie

$f: U \to V$, $g: V \to W$ Homomorphismen. Zeigen Sie, dass

$$\dim(\mathrm{Bild}(g \circ f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(g)) = \dim(\mathrm{Bild}(f))$$

gilt.

(ii) Gegeben Sei die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie Teilaufgabe (i) um $\dim(\mathrm{Bild}(f \circ f))$ zu bestimmen.

Lösung.

(a) (i) Matrizen aus U haben als erste und zweite Spalte eine Nullspalte. Die mittlere Spalte ist frei wählbar, es ist also

$$U = \left\langle \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \right\rangle$$

ein dreidimensionaler Unterraum des $3 \cdot 3 = 9$ dimensionalen $(\mathbb{Z}_3)^{3\times 3}$. Entsprechend ist $\mathrm{codim}(U) = \dim_{V/U} = \dim_V - \dim_U = 9 - 3 = 6$. (0.5 Punkte)

(ii) Wir wissen bereits, dass $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$ ein unendlichdimensionaler Vektorraum ist, denn die charakteristischen Funktionen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind eine unendliche, linear unabhängige Menge. Ebenfalls ist die Dimension von U unendlich, denn die charakteristischen Funktionen $(e_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sind (als Teilfamilie der obigen) linear unabhängig aber immernoch abzählbar unendlich. Wir können den Dimensionsatz hier also zu keiner Aussage über $\mathrm{codim}\, U$ verwenden, denn wir sind in dem Fall, in dem er $\infty - \infty$ ergeben würde. (0.5 Punkte)

(iii) Wir wissen, dass $\mathbb{Q}[t]$ unendlichdimensional ist. Der Unterraum U besitzt die Basis $\{t, \dots, t^{10}\}$ und ist damit 10-dimensional, also endlichdimensional. Laut des Dimensionssatzes muss

$$\infty = \dim(\mathbb{Q}) = \dim U + \mathrm{codim}\, U = 10 + \mathrm{codim}\, U$$

gelten, und damit $\mathrm{codim}\, U = \infty$. (0.5 Punkte)

(b) (i) Es ist $\mathrm{Kern}(f) = \langle t, \dots, t^5 \rangle$ und damit $\mathrm{Defekt}(f) = 5$. Entsprechend ergibt sich $\mathrm{Rang}(f) = \dim(V) - \mathrm{Defekt}(f) = 6 - 5 = 1$. (0.5 Punkte)

(ii) Da $f = \mathrm{id}$ ist, ist natürlich $\mathrm{Bild}(f) = W$ und damit $\mathrm{Rang}(f) = \dim(V) = 4$ also $\mathrm{Defekt}(f) = \dim(V) - \mathrm{Rang}(f) = 4 - 4 = 0$. (0.5 Punkte)

(iii) Die ersten beiden Zeilen von $f(A)$ bestehen aus den vertauschten ersten beiden Zeilen von A, also ist $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$ und damit $\mathrm{Defekt}(f) = 0$, also $\mathrm{Rang}(f) = \dim(V) - \mathrm{Defekt}(f) = 6 - 0 = 6$. (0.5 Punkte)

(c) (i) Wir wissen, dass $\mathrm{Bild}(f)$ ein Unterraum von V ist. Schränken wir g auf diesen Raum ein, so bleibt $g|_{\mathrm{Bild}(f)}$ ein Homomorphismus von $\mathrm{Bild}(f)$ nach W. Wenden wir auf diesen Homomorphismus den Dimendionssatz an, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Bild}(f)) &= \dim(\mathrm{Kern}(g|_{\mathrm{Bild}(f)})) + \dim(\mathrm{Bild}(g|_{\mathrm{Bild}(f)}))\\ &= \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(g)) + \dim(\mathrm{Bild}(g \circ f)).\end{aligned}$$

(1 Punkt)

(ii) Den Kern von f erhält man aus der Bedingung

$$0 = f\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\right) = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},$$

also als die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{array}\right]$$

und der dazugehörigen reduzierten Zeilenstufenform

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

also als $\mathrm{Kern}(f) = \langle(-2, 1, 1)^\mathsf{T}\rangle$. (1 Punkt)

Damit ist klar, dass die Bilder der Einheitsvektoren linear abhängig sind. Aus dem Dimensionssatz erhält man, dass $\mathrm{Bild}(f)$ zweidimensional ist und $f(e_2)$ und $f(e_3)$ sind linear unabhängig, sind also eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Da

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}f(e_2) - f(e_3)$$

ist, ist $\mathrm{Kern}(f) \subseteq \mathrm{Bild}(f)$ und damit $\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f)$ eindimensional. (1 Punkt)

Aus der vorherigen Teilaufgabe folgt nun $\dim(\mathrm{Bild}(f \circ f)) = 1$.

Hausaufgabe 13.2 (Charakterisierung der Bijektivität von Homomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume)
3.5 + 2.5 = 6 Punkte

(a) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K sowie $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie Folgerung 18.8, also die folgenden Aussagen:

(i) Haben V und W dieselbe endliche Dimension $\dim(V) = \dim(W)$, dann sind äquivalent:

(1) f ist injektiv.

(2) $\text{Defekt}(f) = 0$.

(3) f ist surjektiv.

(4) $\text{Rang}(f) = \dim(V)$.

(5) f ist bijektiv.

(ii) Ist V endlich-dimensional und gilt $\dim(V) < \dim(W) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht surjektiv sein.

(iii) Ist W endlich-dimensional und gilt $\dim(W) < \dim(V) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht injektiv sein.

(iv) Es sei V oder W endlich-dimensional. Ein Isomorphismus $V \to W$ existiert genau dann, wenn der andere Vektorraum auch endlich-dimensional ist und $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

(b) Gegeben seien die unten stehenden Paare von Vektorräumen V und W über demselben Körper. Welche Aussagen können Sie bezüglich der Injektivität und Surjektivität einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ anhand des obigen Satzes machen?

(i) $V := K^3$, $W := K_4$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$

(ii) $V := K_4$, $W := K^3$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$

(iii) $V := \mathbb{Q}_2[t]$, $W := \mathbb{R}_2[t]$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

(iv) $V := \mathbb{Q}_2[t]$, $W := \mathbb{Q}_2[t]$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

(v) $V := (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}}$, $W := \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

Lösung.

(a) (*i*) Aussage (1) $\Leftrightarrow$ Aussage (2):

$$\begin{aligned} & f \text{ ist injektiv} && \\ \Leftrightarrow\quad & \operatorname{Kern}(f) = \{0\} && \text{wegen Lemma 17.6} \\ \Leftrightarrow\quad & \dim(\operatorname{Kern}(f)) = 0 && \text{genau der Nullraum hat Dimension 0 (Beispiel 13.21).} \end{aligned}$$

Aussage (2) $\Leftrightarrow$ Aussage (4):

$$\begin{aligned} & \dim(\operatorname{Kern}(f)) = 0 && \\ \Leftrightarrow\quad & \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(V) && \text{Dimensionsformel (18.6): } \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Kern}(f)). \end{aligned}$$

Aussage (3) $\Leftrightarrow$ Aussage (4):

$$\begin{aligned} & \operatorname{Bild}(f) = W && \\ \Leftrightarrow\quad & \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(W) && \text{nach Folgerung 13.22} \\ \Leftrightarrow\quad & \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(V) && \text{nach Voraussetzung } \dim(V) = \dim(W). \end{aligned}$$

Da sich Bijektivität aus Surjektivität und Injektivität zusammensetzt, gilt auch Aussage (1) $\Leftrightarrow$ Aussage (3) $\Leftrightarrow$ Aussage (5). (1.5 Punkte)

(*ii*) Nach Dimensionsformel (18.6) gilt

$$\dim(\operatorname{Kern}(f)) + \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(V).$$

Wegen $\dim(\operatorname{Bild}(f)) \leqslant \dim(V) < \dim(W)$ ist $\operatorname{Bild}(f)$ ein echter Unterraum von W, also f nicht surjektiv. (0.5 Punkte)

(*iii*) Nach Dimensionsformel (18.6) gilt

$$\dim(\operatorname{Kern}(f)) + \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(V).$$

Wegen $\dim(\operatorname{Bild}(f)) \leqslant \dim(W) < \dim(V)$ kann $\operatorname{Kern}(f)$ nicht der Nullraum sein, also ist f nicht injektiv. (0.5 Punkte)

(*iv*) Haben V und W die gleiche, endliche Dimension, dann existieren Familien $(v_n)_{n \in [\![0, \dim V]\!]}$ und $(w_n)_{n \in [\![0, \dim V]\!]}$ von Basisvektoren (zu der gleichen Indexmenge). Satz 17.7 impliziert dann die Existenz eines Isomorphismus.

Existiert ein Isomorphismus von V nach W, dann ist für jede Familie von Basisvektoren $(v_n)_{n\in[\![0,\dim V]\!]}$ aus V deren Bildfamilie $f(v_n)_{n\in[\![0,\dim V]\!]}$ linear unabhaengig und erzeugend, also eine Basis (Lemma 17.5). (1 Punkt)

(b) (i) Die Dimension des Bilds ist höchstens so groß, wie die des Urbildraums, also 3, und damit echt kleiner als die Dimension des Bildraums (4), daher kann die Funktion nicht surjektiv sein. Injektivität ist möglich. (0.5 Punkte)

(ii) Die Dimension des Bilds ist höchstens so groß, wie die des Bildraums, also 3, und damit echt kleiner als die Dimension des Urbildraums (4), daher kann die Funktion nicht Injektiv sein, denn der Kern hat mindestens Dimension 1. Surjektivität ist möglich. (0.5 Punkte)

(iii) Die Dimension des Bilds ist höchstens so groß, wie die des Urbildraums, also 3, und damit echt kleiner als die Dimension des Bildraums (∞), daher kann die Funktion nicht surjektiv sein. Injektivität ist möglich. (0.5 Punkte)

(iv) Die Dimension des Bild- und des Urbildraums stimmen überein, hier existieren Isomorphismen. (0.5 Punkte)

(v) Der Urbildraum hat unendliche Dimension, der Bildraum aber nur Dimension 1, es also keine injektiven linearen Abbildungen existieren, jede lineare Abbildungen hat einen unendlichdimensionalen Kern. Surjektivität ist möglich. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe 13.3 (Koordinatendatendarstellung von Vektoren) 0.5 + 0.5 + 1 = 2 Punkte

Gegeben seien die folgenden Kombinationen von Vektorräumen V mit Basen B und Vektoren $v \in V$. Bestimmen Sie für jede Kombination die Koordinatendarstellung von v bzgl. B. Woraus bestehen die Spalten der Koeffizientenmatrizen der dazugehörigen linearen Gleichungssysteme?

(a) $V := \mathbb{R}_3[t]$ über $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $B := (1, 1+t, 1+t^2, 1+t^3)$, $v := 0 + 1t + 2t^2 + 3t^3$

(b) $V := \mathbb{R}^{[\![1,4]\!]}$ über $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $B := (ke_k)_{k\in[\![1,4]\!]}$, $v := \mathrm{id}$

(c) $V := \mathbb{Q}_5[t]\,/\,\langle 1, t^2, t^4\rangle$ über $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $B := ([t-t^3], [8\,t - 7\,t^3], [t^5])$, $v := [1+t+t^2+t^3+t^4+t^5]$

Lösung.

In den Matrizen bestehen die Spalten aus den Koordinatendarstellungen der Vektoren aus B bzgl. der Basis, bzgl. welcher der Koeffizientenvergleich durchgeführt wird, also derjenigen Basis, bezüglich welcher die Elemente der Basis B und die v dargestellt sind. In diesem Fall sind das immer die

Standardbasen der jeweiligen Räume.

Formal kann man den Koeffizientenvergleich also auch so interpretieren: Wir nehmen die Elemente aus B sowie v und wenden Φ_E^{-1} mit der Standardbasis E an. Dann stellen wir die Frage, wie wir $\Phi_E^{-1}(v)$ aus $\Phi_E^{-1}(B)$ kombinieren können, was genau dem linearen Gleichungssystem in Matrixproduktschreibweise entspricht.

(a) Wir machen den Ansatz

$$t + 2t^2 + 3t^2 = \alpha_1 1 + \alpha_2(1+t) + \alpha_3(1+t^2) + \alpha_4(1+t^3) = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3.$$

Ein Vergleich der Koeffizienten vor der Monombasis ergibt das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix der Form

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

in deren letzter Spalte nun der gesuchte Koordinatenvektor steht. (0.5 Punkte)

(b) Wir machen den Ansatz

$$\mathrm{id} = \sum_{k=1}^{4} k e_k = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k e_k$$

wo wieder ein Vergleich der Koeffizienten vor der Basis der charakteristischen Funktionen das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix der Form

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

liefert und damit den Koeffizientenvektor in der letzten Spalte. (0.5 Punkte)

(c) In dem vorliegenden Faktorraum ist $v = [1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5] = [t + t^3 + t^5]$

Wir machen den Ansatz

$$[t + t^3 + t^5] = \alpha_1[t - t^3] + \alpha_2[8t - 7t^3] + \alpha_3[t^5] = (\alpha_1 + 8\alpha_2)[t] + (-\alpha_1 - 7\alpha_2)[t^3] + \alpha_3[t^5]$$

und ein Koeffizientenvergleich vor der Monomklassenbasis liefert ein lineares Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 8 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

in deren letzter Spalte nun der gesuchte Koordinatenvektor steht. (1 Punkt)

Hausaufgabe 13.4 (Darstellungsmatrizen) 2.5 + 2.5 = 5 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen aus Hausaufgabe 12.1 Teilaufgabe (a) und Hausaufgabe 13.1 Teilaufgabe (b), sofern dies möglich ist, jeweils bzgl. der Standardbasen der entsprechenden Vektorräume.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der unten stehenden linearen Abbildung

(i) $(\mathcal{P}(\llbracket 1,3 \rrbracket), \triangle, \cdot) \ni M \mapsto M \cap \{1,3\} \in (\mathcal{P}(\llbracket 1,4 \rrbracket), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ bzgl. der Basen

$$(\{1,2,3\},\ \{1,3\},\ \{1\ \cancel{2}\}) \quad \text{und} \quad (\{1,2\},\ \{2\},\ \{3,4\},\ \{4\}).$$

(ii) $(\mathcal{P}(\llbracket 1,4 \rrbracket), \triangle, \cdot) \ni M \mapsto e_M \in ((\mathbb{Z}_2)^{\llbracket 1,5 \rrbracket}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ bzgl. der Basen

$$(\{1,2\},\ \{2\},\ \{3,4\},\ \{4\}) \quad \text{und} \quad (e_1,\ e_1+e_2,\ e_2+e_3,\ e_3+e_4,\ e_4+e_5),$$

wobei e_M die Elemente aus M auf 1 und jedes andere Argument auf 0 abbildet.

(iii) Die Komposition der beiden obigen Abbildungen bzgl. der Basen

$$(\{1,2,3\},\ \{1,3\},\ \{1\ \cancel{2}\}) \quad \text{und} \quad (e_1,\ e_1+e_2,\ e_2+e_3,\ e_3+e_4,\ e_4+e_5).$$

Hinweis: Hier können Sie sich mit einem Resultat aus dem Skript den Großteil der Arbeit sparen.

Lösung.

Die Matrizen ergeben sich immer, indem man spaltenweise die Koeffizientenvektoren der Bilder der Basisvektoren des Urbildraums bzgl. der Bildraumbasis einträgt. Das ist genau der gleiche Prozess, den wir in Hausaufgabe 13.3 schon durchgeführt haben. Insbesondere in den unintuitiveren Räumen bietet es sich an, statt in dem Vektorraum selbst in dessen Koordinatenraum bzgl. der Standardbasis zu „denken". Beispielweise ist in $(\mathcal{P}(\llbracket 1,3 \rrbracket), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ die Standardbasis $E \coloneqq \big\{\{1\},\{2\},\{3\}\big\}$ also ist der Vektor $\{1,2,3\} = \{1\}\triangle\{2\}\triangle\{3\} = \Phi_E((1,1,1)^\intercal)$ und $\{1,3\} = \{1\}\triangle\{3\} = \Phi_E((1,0,1)^\intercal)$.

(a) In dieser Teilaufgabe sind die Basisdarstellungen der Bilder sehr leicht zu bestimmen, weil wir nur mit Standardbasen arbeiten, deshalb ist die Musterlösung relativ knapp gehalten.

Zu Hausaufgabe 12.1 Teilaufgabe (a): Es sind nur die Abbildungen aus Teilaufgaben (i) und (iv) zu untersuchen, alle anderen Abbildungen sind entweder nicht linear oder involvieren unendlichdimensionale Räume.

Im Fall von Teilaufgabe (i) ist die Standardbasis E_5 die Basis der Einheitsvektoren und es ergibt sich die Matrix

$$\mathcal{M}^{E_V}_{E_W}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in K^{5\times 5}.$$

(0.5 Punkte)

Im Fall von Teilaufgabe (iv) ist die Standardbasis die Monombasis und es ergibt sich die Matrix

$$\mathcal{M}^{E_V}_{E_W}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in K^{9\times 5}.$$

(0.5 Punkte)

Zu Hausaufgabe 13.1 Teilaufgabe (b): Hier können alle Abbildungen untersucht werden, denn es handelt sich um endlichdimensionale Vektorräume und lineare Abbildungen.

Im Fall von Teilaufgabe (i) ist die Standardbasis die Monombasis und es ergibt sich die Matrix

$$\mathcal{M}^{E_V}_{E_W}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{7\times 6}.$$

(0.5 Punkte)

Im Fall von Teilaufgabe (ii) ist die Standardbasis die der charakteristischen Funktionen, da die Abbildung die Identität ist, ist das aber auch egal, denn solang auf der Bild- und Urbildseite die gleiche Basis verwandt wird, ergibt sich die Identitätsmatrix $\mathcal{M}^{E_4}_{E_4}(f) = I_4 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. (0.5 Punkte)

Im Fall von Teilaufgabe *(iii)* besteht die Standardbasis aus den Matrizen, die in genau einem Eintrag eine 1 und sonst 0 stehen haben, also die Matrizen

$$(E_{nm})_{n\in[\![1,2]\!],\, m\in[\![1,3]\!]} \subseteq V \quad \text{und} \quad (E_{nm})_{n\in[\![1,3]\!],\, m\in[\![1,3]\!]} \subseteq W.$$

Da diese Familien noch doppelt indiziert sind, müssen wir uns auf eine Ordnung festlegen. Wir machen das spaltenweise, und erhalten die Familien der Form

$$\left(E_{\operatorname{mod}(k-1,n)+1,\lfloor\frac{k+1}{n}\rfloor}\right)_{k\in[\![1,nm]\!]} = (E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots, E_{nm}).$$

Die Darstellungsmatrix ergibt sich entsprechend zu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{R}^{9\times 6}.$$

Hätten wir die doppelt indizierte Basis zeilenweise einfachindiziert, könnten wir die Struktur der Transformationsmatrix in der Darstellungsmatrix nicht so schnell wiedererkennen, denn die Spalten und Zeilen wären permutiert. (0.5 Punkte)

(b) *(i)* Dass es sich hier tatsächlich um eine lineare Abbildung handelt, muss hier nicht gezeigt werden. Wir haben es aber in Hausaufgabe 12.1 bereits gesehen. Die Additivität folgt direkt daraus, dass $(\mathcal{P}(\cdot), \triangle, \cap)$ einen Ring bildet, die Bedingung der Additivität entspricht nämlich genau dem Distributivgesetz.

Die Basisbilder sind gegeben als $(\{1,3\}, \{1,3\}, \{1\})$. Zu diesen müssen wir nun die Koeffizienten bzgl. der Bildraumbasis $(\{1,2\}, \{2\}, \{3,4\}, \{4\})$ bestimmen.

Wieder können wir einen Ansatz machen, der auf ein lineares Gleichungssystem führt, oder wir wechseln direkt (durch Anwendung von Φ_E^{-1}) in den Koordinatenraum bzgl. der Standardbasis. Beides endet in dem System mit mehreren rechten Seiten im $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$,

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

was die Darstellungsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^{4\times 3}$$

liefert. (1 Punkt)

(ii) Dass es sich hier tatsächlich um eine lineare Abbildung handelt, muss hier nicht gezeigt werden. Offensichtlich ist das allerdings nicht unbedingt, daher prüfen wir Additivität und Homogenität kurz in einem Schritt mit Fallunterscheidung nach. Dafür seien $A, B \in \mathcal{P}([\![1,4]\!])$. Für $\alpha = 0 \in \mathbb{Z}_2$ ist $e_{A\triangle\alpha B} = e_A = e_A + \alpha e_B$ offensichtlich. Für $\alpha = 1 \in \mathbb{Z}_2$ ist $e_{A\triangle\alpha B} = e_{A\triangle B} = e_A + e_B = e_A + \alpha e_B$ nicht offensichtlich für $x \in A \cap B$ und gilt nur weil $\operatorname{char}(\mathbb{Z}_2) = 2$ gilt.

Die Basisbilder sind gegeben als $(e_{\{1,2\}},\ e_{\{2\}},\ e_{\{3,4\}},\ e_{\{4\}})$. Wieder können wir einen Ansatz machen, der auf ein lineares Gleichungssystem führt, oder wir wechseln direkt (durch Anwendung von Φ_E^{-1} im Bildraum) in den Koordinatenraum bzgl. der Standardbasis im Bildraum. Beides endet in dem unten stehenden System mit mehreren rechten Seiten im $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

was die Darstellungsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^{5\times 4}$$

liefert. (1 Punkt)

(iii) Die Darstellungsmatrix der Komposition ist das Produkt der Darstellungsmatrizen, sie ist also durch

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^{5\times 3}$$

gegeben. (0.5 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.