R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 12

Ausgabedatum: 22. Januar 2024
Abgabedatum: 29. Januar 2024

Hausaufgabe 12.1 (Basics zu Vektorraumhomomorphismen) 3.5 + 1 + 1 + 1.5 + 2 = 9 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen Vektorraumhomomorphismen, -endomorphismen oder -automorphismen sind, und beweisen Sie Ihre Antwort.

(i) $f\colon K_5 \ni (v_1, \dots, v_5) \mapsto (v_5, \dots, v_1) \in K_5$ jeweils über einem Körper K.

(ii) $f\colon \mathbb{R}_5 \ni (v_1, \dots, v_5) \mapsto (3\,v_1, 2\,v_4 + v_1, 0, 0, v_5 + 1) \in \mathbb{R}_5$ jeweils über $\mathbb{R}$.

(iii) $f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto \max(x, 0) \in \mathbb{R}$ jeweils über $\mathbb{R}$.

(iv) $f\colon K_4[t] \ni p \mapsto p \cdot t^4 \in K_8[t]$ jeweils mit Polynomverknüpfungen über einem Körper K.

(v) $f\colon \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \ni f \mapsto f^2 \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ jeweils mit den punktweisen Funktionsverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, wobei $f^2 = f \cdot_2 f$ punktweise zu verstehen ist.

(vi) $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto \mathbb{Q} \setminus M \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

(vii) $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto M \cap \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

(b) Es seien $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K. Zeigen Sie, dass wenn $f\colon V \to W$ und $g\colon U \to V$ lineare Abbildungen sind, dann ist auch $f \circ g\colon U \to W$ eine lineare Abbildung (Lemma 17.4).

(c) Es seien $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K und $f\colon V \to W$ bijektiv. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Vektorraumisomorphismus von V nach W ist, wenn f^{-1} ein Vektorraumisomorphismus von W nach V ist.

(d) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $f\colon V \longrightarrow V$ ein Vektorraumendomorphismus mit $v \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$f^{(n)}(v) := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}}(v) \neq 0 \quad \text{und} \quad f^{(n+1)}(v) := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n+1\text{-mal}}(v) = 0.$$

Zeigen Sie, dass $\left\{v, f(v), \ldots, f^{(n)}(v)\right\}$ linear unabhängig ist.

(e) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K der Charakterstik $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie:

(i) Ist $f\colon V \longrightarrow V$ ein selbstinverser Vektorraumautomorphismus, dann sind

$$V_+(f) := \{v \in V \mid f(v) = v\} \qquad \text{und} \qquad V_-(f) := \{v \in V \mid f(v) = -v\}$$

V-komplementäre Unterräume.

(ii) Sind U und W zwei V-komplementäre Unterräume, dann gibt es genau einen selbstinversen Vektorraumautomorphismus mit $V_+(f) = U$ und $V_-(f) = W$.

Hausaufgabe 12.2 (Konstruktion linearer Abbildungen) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

(a) Wir betrachten die Vektorräume $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ über dem Körper $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(e_n) = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $e_n(k) := \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ ist. Ist eine solche Abbildung eindeutig, surjektiv, injektiv oder bijektiv?

(b) Es seien $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über demselben Körper K und $(V_1, +, \cdot)$ sowie $(V_2, +, \cdot)$ Unterräume von $(V, +, \cdot)$. Zeigen Sie, dass lineare Abbildungen $f_1\colon V_1 \longrightarrow W$ und $f_2\colon V_2 \longrightarrow W$ zu einer linearen Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ mit $f|_{V_1} = f_1$ und $f|_{V_2} = f_2$ fortgesetzt werden können, wenn $f_1 = f_2$ auf $V_1 \cap V_2$ gilt. Entscheiden und beweisen Sie, unter welcher Bedingung an V_1 und V_2 diese Fortsetzung eindeutig ist.

Hausaufgabe 12.3 (Matrix-Vektor-Multiplikation als Vektorraumhomomorphismus) 0.5 + 0.5 + 0.5 + 1.5 = 3 Punkte

Es sei K ein Körper und $n, m, k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 17.9, also die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in K^{n \times m}$, dann definiert die **von A induzierte lineare Abbildung**

$$f_A\colon K^m \ni x \mapsto f_A(x) := A\,x \in K^n$$

tatsächlich eine lineare Abbildung $K^m \longrightarrow K^n$.

(b) Ist $f: K^m \to K^n$ eine lineare Abbildung, dann gibt es eine Matrix $A \in K^{n\times m}$, sodass $f = f_A$ gilt.

(c) Sind $A \in K^{n\times m}$ und $B \in K^{m\times k}$, dann gilt

$$f_A \circ f_B = f_{A\,B}.$$

(d) $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $f_A: K^n \to K^n$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt

$$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}.$$

Hausaufgabe 12.4 (Vektorraum der Vektorraumhomomorphismen) 3 Punkte

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K und $V_1 \subseteq V$ sowie $W_1 \subseteq W$ mit den entsprechenden Verknüpfungen Unterräume von $(V, +, \cdot)$ bzw. $(W, +, \cdot)$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Unterräume von $\operatorname{Hom}(V, W)$ sind und beweisen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{aligned}
H_= &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid \operatorname{Kern}(f) = V_1\} & G_= &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid \operatorname{Bild}(f) = W_1\}\\
H_\subseteq &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid \operatorname{Kern}(f) \subseteq V_1\} & G_\subseteq &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid \operatorname{Bild}(f) \subseteq W_1\}\\
H_\supseteq &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid \operatorname{Kern}(f) \supseteq V_1\} & G_\supseteq &:= \{f \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid \operatorname{Bild}(f) \supseteq W_1\}
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 12.5 (Faktorräume und Homomorphiesatz) 1 + 1 = 2 Punkte

(a) Es sei $U := \langle \mathbb{N} \rangle$ mit den entsprechenden Verknüpfungen der Unterraum von $V := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$. Geben Sie eine Beschreibung der Elemente von $V\,/\,U$ an.

(b) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen i. A. gültig ist, und beweisen Sie Ihre Antwort.

  (i) Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V, dann ist $([v_i])_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in $V\,/\,U$.

  (ii) Ist $([v_i])_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in $V\,/\,U$, dann ist $(v_i)_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.