R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 12 - Lösung

Ausgabedatum: 22. Januar 2024
Abgabedatum: 29. Januar 2024

Hausaufgabe 12.1 (Basics zu Vektorraumhomomorphismen) 3.5 + 1 + 1 + 1.5 + 2 = 9 Punkte

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen Vektorraumhomomorphismen, -endomorphismen oder -automorphismen sind, und beweisen Sie Ihre Antwort.

(i) $f\colon K_5 \ni (v_1, \dots, v_5) \mapsto (v_5, \dots, v_1) \in K_5$ jeweils über einem Körper K.

(ii) $f\colon \mathbb{R}_5 \ni (v_1, \dots, v_5) \mapsto (3\,v_1, 2\,v_4 + v_1, 0, 0, v_5 + 1) \in \mathbb{R}_5$ jeweils über $\mathbb{R}$.

(iii) $f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto \max(x, 0) \in \mathbb{R}$ jeweils über $\mathbb{R}$.

(iv) $f\colon K_4[t] \ni p \mapsto p \cdot t^4 \in K_8[t]$ jeweils mit Polynomverknüpfungen über einem Körper K.

(v) $f\colon \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \ni f \mapsto f^2 \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ jeweils mit den punktweisen Funktionsverknüpfungen über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, wobei $f^2 = f \cdot_2 f$ punktweise zu verstehen ist.

(vi) $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto \mathbb{Q} \setminus M \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

(vii) $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \ni M \mapsto M \cap \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ für $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$.

(b) Es seien $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K. Zeigen Sie, dass wenn $f\colon V \to W$ und $g\colon U \to V$ lineare Abbildungen sind, dann ist auch $f \circ g\colon U \to W$ eine lineare Abbildung (Lemma 17.4).

(c) Es seien $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K und $f\colon V \to W$ bijektiv. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Vektorraumisomorphismus von V nach W ist, wenn f^{-1} ein Vektorraumisomorphismus von W nach V ist.

(d) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $f\colon V \to V$ ein Vektorraumendomorphismus mit $v \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$f^{(n)}(v) \coloneqq \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}}(v) \neq 0 \quad \text{und} \quad f^{(n+1)}(v) \coloneqq \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n+1\text{-mal}}(v) = 0.$$

Zeigen Sie, dass $\left\{v, f(v), \dots, f^{(n)}(v)\right\}$ linear unabhängig ist.

(e) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K der Charakterstik $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie:

(i) Ist $f\colon V \to V$ ein selbstinverser Vektorraumautomorphismus, dann sind

$$V_+(f) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = v\} \qquad \text{und} \qquad V_-(f) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = -v\}$$

V-komplementäre Unterräume.

(ii) Sind U und W zwei V-komplementäre Unterräume, dann gibt es genau einen selbstinversen Vektorraumautomorphismus mit $V_+(f) = U$ und $V_-(f) = W$.

Lösung.

(a) (i) Hier handelt es sich um eine **lineare Abbildung**. Um die Strukturverträglichkeit nachzuprüfen seien $u = (u_1, \dots, u_5)$, $v = (v_1, \dots, v_5)$ aus K_5 und $\alpha \in K$ gegeben. Dann gilt

$$f(u+v) = f\left((u_1+v_1, \dots, u_5+v_5)\right) = (u_5+v_5, \dots, u_1+v_1) = (u_5, \dots, u_1) + (v_5, \dots, v_1) = f(u) + f(v)$$
$$f(\alpha\, u) = f\left((\alpha\, u_1, \dots, \alpha\, u_5)\right) = (\alpha\, u_5, \dots, \alpha\, u_1) = \alpha\,(u_5, \dots, u_1) = \alpha\, f(u).$$

Der Definitions- und Zielbereich der Abbildung stimmen überein, es handelt sich also auch um einen **Endomorphismus**. Die Bijektivität der Abbildung folgt sofort aus der komponentenweisen Struktur der Abbildung. Es handelt sich also sogar um einen **Isomorphismus**, also einen linearen **Automorphismus**. (0.5 Punkte)

(ii) Hier handelt es sich um **keine lineare Abbildung**, denn es ist

$$f(0) = (0, 0, 0, 0, 1) \neq 0.$$

(0.5 Punkte)

(iii) Hier handelt es sich um **keine lineare Abbildung**, denn sogar beide Komponenten der Strukturverträglichkeit sind i. A. nicht gegeben, denn für $u = 1 = -v = -\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$f(u+v) = \max(1-1, 0) = 0 \neq 1 = \max(1, 0) + \max(-1, 0) = f(u) + f(v)$$

$$f(\alpha\, u) = \max(-1, 0) = 0 \neq -1 = -1 \max(1, 0) = \alpha f(u).$$

(0.5 Punkte)

(*iv*) Hierbei handelt es sich um eine **lineare Abbildung**, hier werden die Komponenten der Koeffizientenfolge lediglich nach rechts geshiftet. Für $p, q \in K_4[t]$ und $\alpha \in K$ ist auf Grund der Distributivität von der Polynom- und skalaren multiplikation

$$\begin{aligned} f(p+q) &= (p+q) \cdot t^4 = p \cdot t^4 + q \cdot t^4 = f(p) + f(q) \\ f(\alpha p) &= (\alpha p) \cdot t^4 = \alpha(p \cdot t^4) = \alpha f(p). \end{aligned}$$

Die Abbildung ist injektiv, denn

$$p \cdot t^4 = q \cdot t^4 \Leftrightarrow (p-q) \cdot t^4 = 0 \Leftrightarrow p - q = 0 \Leftrightarrow p = q,$$

sie ist aber nicht bijektiv, denn beispielsweise die konstanten Polynome besitzen kein Urbild. (0.5 Punkte)

(*v*) Hier handelt es sich um eine **lineare Abbildung**, denn für jedes $z \in \mathbb{Z}_2$ ist $z^2 = z \cdot_2 z = z$ und damit ist f die Identitätsabbildung, für welche die Linearität offensichtlich ist. Damit ist auch klar, dass es sich auch um einen **Endo**-, **Iso**- und somit auch **Automorphismus** handelt. (0.5 Punkte)

(*vi*) Hier handelt es sich um **keine lineare Abbildung**, denn es ist

$$f(\underbrace{\quad\emptyset\quad}_{=0\in(\mathcal{P}(\cdot),\triangle)}) = \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

(0.5 Punkte)

(*vii*) Hier handelt es sich um eine **lineare Abbildung**. Die Additivität folgt sofort daraus, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ für nichtleere X, wie wir wissen, einen Ring bildet und damit die Distributivitätsgesetze erfüllt sind. Die Homogenität sieht man für $M \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ an Hand von

$$\begin{aligned} f(1\,M) &= (1\,M) \cap \mathbb{N} = M \cap \mathbb{N} = 1\,(M \cap \mathbb{N}) = 1\,f(M) \\ f(0\,M) &= (0\,M) \cap \mathbb{N} = \emptyset \cap \mathbb{N} = \emptyset = 0\,(M \cap \mathbb{N}) = 0\,f(M). \end{aligned}$$

Allerdings ist die Abbildung nicht bijektiv, denn es haben nur Teilmengen der natürlichen Zahlen Urbilder, also handelt es sich nur um einen **Endomorphismus**. (0.5 Punkte)

(b) Sind f und g lineare Abbildungen wie angegeben und $u, v \in U$ sowie $\alpha \in K$, dann ist wegen der Linearität von f und g:

$$\begin{aligned} f \circ g(u+v) &= f(g(u+v)) = f(g(u) + g(v)) = f(g(u)) + f(g(v)) = f \circ g(u) + f \circ g(v) \\ f \circ g(\alpha u) &= f(g(\alpha u)) = f(\alpha g(u)) = \alpha f(g(u)) = \alpha f \circ g(u) \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(c) Ist $f^{-1}\colon W \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung und $u, v \in V$, $\alpha \in K$, dann ist

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(f^{-1}(f(u)) + f^{-1}(f(v))) = f(f^{-1}(f(u)+f(v))) = f(u)+f(v) \\ f(\alpha u) &= f(\alpha f^{-1}(f(u))) = f(f^{-1}(\alpha f(u))) = \alpha f(u). \end{aligned}$$

Die Gegenrichtung folgt mit vertauschten Rollen. (1 Punkt)

(d) Für jede Linearkombination der 0 mit Koeffizienten $\alpha_k \in K$, $k = 0, \dots, n$ der Form

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f^{(k)}(v) = 0$$

und $i \in \mathbb{N}$ ist

$$0 = f^{(i)}(0) = f^{(i)}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f^{(k)}(v)\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f^{(k+i)}(v) = \sum_{k=0}^{n-i} \alpha_k f^{(k+i)}(v).$$

Für $i = n$ folgt, dass $\alpha_{n-n} = \alpha_0 = 0$ sein muss und sukzessive folgt für jeweils kleinere i, dass $\alpha_{n-i} = 0$ für alle $i = n, \dots, 0$ und damit alle der Linearkombinationskoeffizienten. (1.5 Punkte)

(e) Die Aufgabe zeigt, dass selbstinverse Vektorraumautomorphismen im Grunde nur Anteile spiegeln und Anteile unverändert lassen.

(i) Dass es sich bei beiden Mengen um Unterräume handelt folgt mit dem Unterraumkriterium. Dabei ist wegen $f(0) = 0 = -0 \in V_+ \cap V_-$ klar dass beide nichtleer sind. Die Abgeschlossenheit beider Mengen unter den Vektorraumoperationen folgt direkt aus der Linearität von f. Wir zeigen das einmal exemplarisch für V_-. Dafür seien $u, v \in V_-$, $\alpha, \beta \in K$ dann ist

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha(-u) + \beta(-v) = -(\alpha u + \beta v).$$

(0.5 Punkte)

Für die Trivialschnitteigenschaft sei $v \in V_+ \cap V_-$, dann gilt

$$0 = f(0) = f(v-v) = f(v) - f(v) = v - (-v) = \underbrace{2}_{1+1} v,$$

also muss $v = 0$ gewesen sein (Achtung, das gilt wieder nur wegen der Charakteristikeinschränkung). (0.5 Punkte)

Die Erzeugendeneigenschaft ergibt sich durch die Zerlegung

$$v = \underbrace{\frac{1}{2}(v + f(v))}_{\in V_+(f)} + \underbrace{\frac{1}{2}(v - f(v))}_{\in V_-(f)}$$

die wir schon aus dem Beispiel der Transposition von Matrizen aus dem letzten Übungsblatt kennen, siehe Hausaufgabe 10.4. Diese Zerlegung funktioniert nur, weil es sich um einen selbstinversen Automorphismus handelt. (0.5 Punkte)

Beachte: Hat der Körper Charakteristik 2, dann ist $V_-(f) = V_+(f)$ und die einzige selbstinverse lineare Abbildung ist die Identität.

(ii) Der entsprechende Automorphismus ist durch sein Verhalten auf den komplementären Unterräumen bereits vollständig vorgegeben, denn auf Grund der Komplementarität können wir jedes v eindeutig als $v = u + w$ mit u, w aus U bzw. W schreiben und eine lineare Abbildung f muss

$$f(v) = f(u) + f(w)$$

erfüllen. Die Bijektivität folgt dann sofort aus der Bijektivität der Identität über die entsprechende Abbildung der Anteile. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe 12.2 (Konstruktion linearer Abbildungen) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

(a) Wir betrachten die Vektorräume $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ über dem Körper $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(e_n) = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $e_n(k) := \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ ist. Ist eine solche Abbildung eindeutig, surjektiv, injektiv oder bijektiv?

(b) Es seien $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über demselben Körper K und $(V_1, +, \cdot)$ sowie $(V_2, +, \cdot)$ Unterräume von $(V, +, \cdot)$. Zeigen Sie, dass lineare Abbildungen $f_1\colon V_1 \to W$ und $f_2\colon V_2 \to W$ zu einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f|_{V_1} = f_1$ und $f|_{V_2} = f_2$ fortgesetzt werden können, wenn $f_1 = f_2$ auf $V_1 \cap V_2$ gilt. Entscheiden und beweisen Sie, unter welcher Bedingung an V_1 und V_2 diese Fortsetzung eindeutig ist.

Lösung.

(a) Wir wissen bereits, dass die Familie $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist. Satz 17.7 des Skripts liefert dann (für die Urbildfamilie $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Bildfamilie $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$) direkt, dass eine solche gesuchte lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ existiert. (0.5 Punkte)

Die Familie $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist allerdings nicht erzeugend in $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$. Wir können also aus dem oben referenzierten Theorem nicht direkt die Eindeutigkeit der linearen Abbildung folgern. Genauer kann man am Beweis des Theorems erkennen, dass eine solche Abbildung dann (mit Ausnahme des Nullraums als Bildraum) nicht eindeutig sein kann, denn ergänzt man die linear unabhängige Menge zu einer Basis, dann kann man die Bilder der ergänzten Basisvektoren beliebig wählen. (0.5 Punkte)

Die Familie $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist in $\mathbb{R}$ offensichtlich erzeugend und linear abhängig, da die Anzahl der (nicht-Null) Vektoren die Dimension des Raums, also 1, überschreitet. Entsprechend ist jede solche Abbildung surjektiv aber nicht injektiv und damit nicht bijektiv. (0.5 Punkte)

(b) Wir können eine Basis $B_\cap$ von $V_1 \cap V_2$ zu einer Basis B_1 von V_1 und einer Basis B_2 von V_2 ergänzen. Die Menge $B_1 \cup B_2$ ist dann eine Basis von $V_1 + V_2$. Wieder können wir aus Satz 17.7 folgern, dass dann eine eindeutige lineare Abbildung $f\colon V_1 + V_2 \to W$ existiert, die die Fortsetzungsbedingung erfüllt. Ist $V_1 + V_2 = V$ ist die Fortsetzung also eindeutig und ihre Existenz nachgewiesen. Ist $V_1 + V_2 \neq V$, dann können wir $B_1 \cup B_2$ zu einer Basis B von V ergänzen und für jedes $v \in B \setminus (B_1 \cup B_2)$ haben wir freie Bildwahl in W, die ist also nur eindeutig, wenn W der Nullraum ist. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe 12.3 (Matrix-Vektor-Multiplikation als Vektorraumhomomorphismus) 0.5 + 0.5 + 0.5 + 1.5 = 3 Punkte

Es sei K ein Körper und $n, m, k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie Lemma 17.9, also die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in K^{n\times m}$, dann definiert die **von A induzierte lineare Abbildung**

$$f_A\colon K^m \ni x \mapsto f_A(x) \coloneqq A\,x \in K^n$$

tatsächlich eine lineare Abbildung $K^m \to K^n$.

(b) Ist $f\colon K^m \to K^n$ eine lineare Abbildung, dann gibt es eine Matrix $A \in K^{n\times m}$, sodass $f = f_A$ gilt.

(c) Sind $A \in K^{n\times m}$ und $B \in K^{m\times k}$, dann gilt

$$f_A \circ f_B = f_{A\,B}.$$

(d) $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $f_A\colon K^n \to K^n$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt

$$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}.$$

Lösung.

(a) Wir müssen Linearität nachprüfen, diese folgt direkt aus dem Matrixmultiplikationseigenschaften. Dafür seien $x, y \in K^m$ und $\alpha \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_A(x+y) &= A\,(x+y) = A\,x + A\,y = f_A(x) + f_A(y) \\ f_A(\alpha\,x) &= A(\alpha\,x) = \alpha(A\,x). \end{aligned}$$

(0.5 Punkte)

(b) Die Matrix lässt sich leicht konkret angeben, denn für $v = \sum_{i=1}^m v_i e_i$ ist

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^m v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m \underbrace{v_i}_{\in K} \underbrace{f(e_i)}_{\in K^n} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \cdots & f(e_m) \\ | & & | \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

Hier sieht man auch die Eindeutigkeit dieser Matrix. (0.5 Punkte)

(c) Diese Eigenschaft folgt sofort aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation, denn für $v \in K^m$ ist

$$f_A \circ f_B(v) = f_A(f_B(v)) = A\,(B\,v) = (A\,B)\,v = f_{AB}(v).$$

(0.5 Punkte)

(d) Ist $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, dann ist

$$f_A \circ f_{A^{-1}} = A\,A^{-1}(\cdot) = I_n(\cdot) = \mathrm{id} = A^{-1}A(\cdot) = f_{A^{-1}} \circ f_A.$$

Ist f_A invertierbar, dann gibt es $(f_A)^{-1}$ und eine Matrix B, so dass $f_B = (f_A)^{-1}$. Entsprechend ist

$$f_{I_n} = \mathrm{id} = (f_A)^{-1} \circ f_A = f_B \circ f_A = f_{BA} = f_{AB}$$

und die Eindeutigkeit der darstellenden Matrix liefert $B = A^{-1}$. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe 12.4 (Vektorraum der Vektorraumhomomorphismen) 3 Punkte

Es seien $(V,+,\cdot)$ und $(W,+,\cdot)$ Vektorräume über dem gleichen Körper K und $V_1 \subseteq V$ sowie $W_1 \subseteq W$ mit den entsprechenden Verknüpfungen Unterräume von $(V,+,\cdot)$ bzw. $(W,+,\cdot)$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Unterräume von $\mathrm{Hom}(V,W)$ sind und beweisen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{aligned} H_= &:= \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid \mathrm{Kern}(f) = V_1\} & G_= &:= \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid \mathrm{Bild}(f) = W_1\} \\ H_\subseteq &:= \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid \mathrm{Kern}(f) \subseteq V_1\} & G_\subseteq &:= \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid \mathrm{Bild}(f) \subseteq W_1\} \\ H_\supseteq &:= \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid \mathrm{Kern}(f) \supseteq V_1\} & G_\supseteq &:= \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid \mathrm{Bild}(f) \supseteq W_1\} \end{aligned}$$

Lösung.

Die Nullfunktion hat vollen Kern, sie liegt also genau dann in $H_=$ und $H_\subseteq$, wenn $V_1 = V$ ist. Ansonsten handelt es sich bei diesen beiden Mengen nicht um Unterräume. Ist $V_1 = V$, dann ist $H_=$ der triviale Unterraum $\{0\}$ und $H_\subseteq$ der triviale Unterraum $\operatorname{Hom}(V, W)$. (0.5 Punkte)

Analog hat die Nullfunktion triviales Bild, sie liegt also genau dann in $G_=$ und $G_\supseteq$, wenn W_1 der triviale Nullunterraum ist. Ansonsten handelt es sich bei diesen beiden Mengen nicht um Unterräume. Ist $W_1 = \{0\}$, dann ist $G_=$ der triviale Unterraum $\{0\}$ und $G_\supseteq$ der triviale Unterraum $\operatorname{Hom}(V, W)$. (0.5 Punkte)

Die Menge $H_\supseteq$ enthält immer die Nullfunktion, ist also nie leer. Außerdem ist sie abgeschlossen unter den Vektorraumverknüpfungen. Seien dafür $f, g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $\alpha, \beta \in K$. Dann ist

$$(\alpha f + \beta g)(v) = \alpha f(v) + \beta g(v) = 0 \quad \forall v \in V_1.$$

Es handelt sich also um einen Unterraum. (1 Punkt)

Die Menge $G_\subseteq$ enthält immer die Nullfunktion, ist also nie leer. Außerdem ist sie abgeschlossen unter den Vektorraumverknüpfungen. Seien dafür $f, g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $\alpha, \beta \in K$. Dann ist

$$(\alpha f + \beta g)(v) = \alpha \underbrace{f(v)}_{\in W_1} + \beta \underbrace{g(v)}_{\in W_1} \in W_1 \quad \forall v \in V.$$

Es handelt sich also um einen Unterraum. (1 Punkt)

Hausaufgabe 12.5 (Faktorräume und Homomorphiesatz) 1 + 1 = 2 Punkte

(a) Es sei $U := \langle \mathbb{N} \rangle$ mit den entsprechenden Verknüpfungen der Unterraum von $V := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$. Geben Sie eine Beschreibung der Elemente von $V\,/\,U$ an.

(b) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen i. A. gültig ist, und beweisen Sie Ihre Antwort.

  (i) Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V, dann ist $([v_i])_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in $V\,/\,U$.

  (ii) Ist $([v_i])_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in $V\,/\,U$, dann ist $(v_i)_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V.

Lösung.

(a) Die Menge $\langle \mathbb{N} \rangle$ ist der von dem Element $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ erzeugte Unterraum von $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, er besteht also genau aus den Elementen

$$\{\emptyset, \mathbb{N}\}\,.$$

Ein Element $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ liefert also die Klasse

$$[M] = \{M \triangle \emptyset, M \triangle \mathbb{N}\} = \{M, \mathbb{N} \setminus M\}$$

und damit die gleiche, wie sein Komplement in $\mathbb{N}$. Es gilt also

$$V \,/\, \langle \mathbb{N} \rangle = \{\{M, \mathbb{N} \setminus M\} \mid M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}\,.$$

(1 Punkt)

(b) (i) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch, denn sobald $v_i \in U$ für ein $i \in I$, dann beinhaltet die Familie $[v_i]_{i \in I}$ den Nullvektor und ist damit linear abhängig. (0.5 Punkte)

(ii) Diese Aussage ist korrekt, wie man schnell über Kontraposition zeigen kann, denn ist $(v_i)_{i \in I}$ linear abhängig, dann ist $[v_i]_{i \in I}$ die dazugehörige Bildfamilie unter der linearen Abbildung der kanonischen Surjektion, und damit nach Lemma 17.5 ebenfalls linear abhängig. (0.5 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.