Übung 11

Ausgabedatum: 15. Januar 2024
Abgabedatum: 22. Januar 2024

Hausaufgabe 11.1 (Ring quadratischer Matrizen) 1.5 + 1 + 0.5 + 1 + 2 = 6 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Matrixprodukt von n beliebigen strikten oberen Dreiecksmatrizen aus dem $K^{n\times n}$ die Nullmatrix ergibt. Zeigen Sie weiter, dass das Lemma 15.33 impliziert, also dass $A^n = 0$ für jede strikte obere Dreiecksmatrix $A \in K^{n\times n}$ gilt.

(b) Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass für beliebige Matrizen $A \in K^{n\times m}$ und invertierbare Matrizen $B \in K^{n\times n}$, $C \in K^{m\times m}$ die Gleichheit

$$\operatorname{Rang}(B\,A\,C) = \operatorname{Rang}(A) \tag{15.35}$$

gilt (Folgerung 15.41).

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, ob $K^{n\times n} \ni A \mapsto A^\intercal \in K^{n\times n}$ ein Ringautomorphimus von Ringen mit Eins ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, ob die Ringe der Mengen $K^{n\times n}_{\diagdown}$, $K^{n\times n}_{\text{◹}}$ und $K^{n\times n}_{\text{◺}}$ mit der Matrixaddition und -multiplikation kommutativ sind. Falls ja, kommutieren die jeweiligen Matrizen auch mit allen Matrizen aus $K^{n\times n}$?

(e) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$P \coloneqq \{A \in K^{n\times n} \mid \text{In jeder Zeile und jeder Spalte von } A \text{ steht genau eine } 1 \text{ und sonst } 0\} \subseteq \operatorname{GL}(n, K)$.

(i) Zeigen Sie, dass P mit der Matrixmultiplikation eine zur $(S_n, \circ)$ isomorphe Gruppe bildet.

(ii) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = A^\intercal$ für alle $A \in P$.

(iii) Bestimmen Sie eine Zerlegung der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in das Produkt von Elementarmatrizen vom Typ III.

Hausaufgabe 11.2 (Allgemeine lineare Gruppe) 1 + 3 = 4 Punkte

(a) Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, K)$ genau dann endlich ist, wenn K endlich ist.

(b) (i) Bestimmen Sie alle Elemente der $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

Hinweis: Überführen Sie ein allgemeines $A \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ in Zeilenstufenform und unterscheiden Sie geeignete Fälle.

(ii) Bestimmen Sie die Ordnung für alle Elemente aus $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$ nicht kommutativ ist.

Hausaufgabe 11.3 (Beispiele linearer Gleichungssysteme) 4 + 2 = 6 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für

(i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ in Abhängigkeit von r, s;

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$ über $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$ in Abhängigkeit von z.

(b) Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}_3[t]$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Basen

$$B_1 := \left\{1 + t^2 + t^3,\ t + 2\,t^2 + t^3,\ 1 + t^3,\ 2\,t + t^2 + t^3\right\}$$

$$B_2 := \left\{2 + t^2,\ 3\,t + 2\,t^3,\ 1 + 2\,t + 3\,t^2 + t^3,\ 1 + t + t^2 + 5\,t^3\right\}$$

Bestimmen Sie die Linearkombinationskoeffizienten der Elemente in B_2 bezüglich B_1, indem Sie das dazugehörige lineare Gleichungssystem mit mehreren rechten Seiten aufstellen und lösen.

Hausaufgabe 11.4 (Resultate zu Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme) 1 + 1 + 1 = 3 Punkte

Es sei K ein Körper und $n, m, k \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{n\times m}$ und $b \in K^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(A, b)$ genau dann ein Unterraum von K^m ist, wenn $b = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $M \in K^{k\times n}$ gilt:

$$\mathcal{L}(MA, Mb) = \mathcal{L}(A, b + \mathcal{L}(M, 0)) := \bigcup_{c\in\mathcal{L}(M,0)} \mathcal{L}(A, b + c).$$

(c) Zeigen Sie, dass für alle $M \in K^{m\times k}$ gilt:

$$\mathcal{L}(AM, b) = \mathcal{L}(M, \mathcal{L}(A, b)) := \bigcup_{c\in\mathcal{L}(A,b)} \mathcal{L}(M, c).$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.