Übung 11 - Lösung

Ausgabedatum: 15. Januar 2024
Abgabedatum: 22. Januar 2024

Hausaufgabe 11.1 (Ring quadratischer Matrizen) 1.5 + 1 + 0.5 + 1 + 2 = 6 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Matrixprodukt von n beliebigen strikten oberen Dreiecksmatrizen aus dem $K^{n \times n}$ die Nullmatrix ergibt. Zeigen Sie weiter, dass das Lemma 15.33 impliziert, also dass $A^n = 0$ für jede strikte obere Dreiecksmatrix $A \in K^{n \times n}$ gilt.

(b) Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass für beliebige Matrizen $A \in K^{n \times m}$ und invertierbare Matrizen $B \in K^{n \times n}$, $C \in K^{m \times m}$ die Gleichheit

$$\operatorname{Rang}(B\,A\,C) = \operatorname{Rang}(A) \tag{15.35}$$

gilt (Folgerung 15.41).

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, ob $K^{n \times n} \ni A \mapsto A^\intercal \in K^{n \times n}$ ein Ringautomorphimus von Ringen mit Eins ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, ob die Ringe der Mengen $K^{n \times n}_{\diagdown}$, $K^{n \times n}_{\triangledown}$ und $K^{n \times n}_{\llcorner\!\diagdown}$ mit der Matrixaddition und -multiplikation kommutativ sind. Falls ja, kommutieren die jeweiligen Matrizen auch mit allen Matrizen aus $K^{n \times n}$?

(e) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$P \coloneqq \{A \in K^{n \times n} \mid \text{In jeder Zeile und jeder Spalte von } A \text{ steht genau eine 1 und sonst } 0\} \subseteq \operatorname{GL}(n, K).$$

(i) Zeigen Sie, dass P mit der Matrixmultiplikation eine zur $(S_n, \circ)$ isomorphe Gruppe bildet.

(ii) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = A^\intercal$ für alle $A \in P$.

(iii) Bestimmen Sie eine Zerlegung der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in das Produkt von Elementarmatrizen vom Typ III.

Lösung.

(a) Wie man in Beispiel 15.34 des Skripts schön sehen kann, sorgt das Erhöhen der Potenz einer strikten oberen Dreiecksmatrix dafür, dass mindestens eine weitere Nebendiagonale nur mit Nullen besetzt ist – die Nicht-Null Einträge der Matrix wandern bei Erhöhen der Potenz nach rechts oben. Dieser Effekt ist unabhängig davon, dass in dem Beispiel die Potenzen einer strikten oberen Dreiecksmatrix gebildet werden, er tritt auch bei allgemeinen Produkten auf.

Genauer zeigen wir Folgendes: Es seien A und B aus $K^{n \times n}$ strikte obere Dreiecksmatrizen und $k_A, k_B \in [\![0, n-1]\!]$ Zahlen, so dass die k-ten Nebendiagonalen von A bzw. B für $k \in [\![0, k_A]\!]$ bzw. $k \in [\![0, k_B]\!]$ nur aus Nullen besteht. Dann bestehen die k-ten Nebendiagonalen des Produkts $A\,B$ für $k \in [\![0, k_A + k_B + 1]\!]$ nur aus Nullen.

Die Behauptung folgt schnell aus der Definition des Matrixprodukt, denn nach Voraussetztung sind

$$a_{ij} = 0 \text{ für } j - i \leqslant k_A \quad \text{und} \quad b_{ij} = 0 \text{ für } j - i \leqslant k_B$$

und somit

$$(ab)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{a_{i\ell}}_{\substack{=0 \\ \text{für } \ell \leqslant i + k_A}} \underbrace{b_{\ell j}}_{\substack{=0 \\ \text{für } \ell \geqslant j - k_B}} = \sum_{\ell = i + k_A + 1}^{j - k_B - 1} a_{i\ell} b_{\ell j}$$

und die Indexmenge der Summe ist leer, wenn $j - i \leqslant k_B + k_A + 1$.

Die Anzahl der führenden, nichtnegativen Nulldiagonalen summiert sich also und wird um 1 verringert. Entsprechend ist klar, dass das Produkt aus n strikten oberen Dreiecksmatrizen die Nullmatrix ergibt. Die n-te Potenz A^n einer solchen Matrix ist genau ein solches Produkt. (1.5 Punkte)

Der Beweis ist am einfachsten mit der komponentenweise Definition des Matrixprodukts zu führen. Eine Intuition, was hier passiert findet man mit der spaltenweisen Interpretation jedoch leichter. Das Produkt $A\,B$ erhält erstmal k_B Nullspalten aus der Struktur von B, dann weitere k_A Nullspalten aus der Struktur von A und dem Fakt, dass die Spalten $k_A + k_B$ nur die ersten k_A Spalten von A kombinieren. Anschließend ist jede Spalte eins weiter rechts eine Kombination aus Spalten von A, die einen Eintrag höchstens eins weiter unten haben kann.

Dass Fälle auftreten können, wo wirklich die n-te Potenz benötigt wird, zeigt schon Beispiel 15.34 des Skripts. Andersherum können durchaus auch Fälle auftreten, in denen A eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, in der lediglich die Hauptdiagonale ausschließlich aus Nullen besteht, und für die schon $A^2 = 0$ gilt, z. B. Matrizen der Struktur

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$ abzulesen, so dass $A^k = 0$ ist, ist also keinesfalls offensichtlich.

(b) Wir nutzen Satz 15.14. Da invertierbare Matrizen Vollrang haben, gilt

$$\operatorname{Rang}(B\,A\,C) \leqslant \min\{\operatorname{Rang}(B),\ \operatorname{Rang}(A),\ \operatorname{Rang}(C)\} \leqslant \operatorname{Rang}(A)$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \operatorname{Rang}(A) &= \operatorname{Rang}((B^{-1}B)\,A\,(C\,C^{-1})) = \operatorname{Rang}(B^{-1}(B\,A\,C)\,C^{-1}) \\ &\leqslant \min\{\operatorname{Rang}(B^{-1}),\ \operatorname{Rang}(B\,A\,C),\ \operatorname{Rang}(C^{-1})\} \leqslant \operatorname{Rang}(B\,A\,C). \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(c) Die Einheitsmatrix ist diagonal, daher gilt $I^\intercal = I$. Außerdem gilt für Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$, dass

$$(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal.$$

Die Matrixmultiplikation ist mit der Transposition aber i. A. bekanntermaßen nicht verträglich, denn es gilt

$$(A\,B)^\intercal = B^\intercal\,A^\intercal \overset{\text{i. A.}}{\neq} A^\intercal\,B^\intercal$$

wie man für die transponierten Matrizen zweier nicht kommutierenden Matrizen sofort einsieht. Ein Sonderfall ist also lediglich der Fall $n = 1$, wo solche Matrizen nicht existieren, hier handelt es sich tatsächlich um einen Ringhomomorphismus. Die Bijektivität liegt hingegen auf der Hand, da die Transposition nur Elemente vertauscht. (0.5 Punkte)

(d) Im Fall $n = 1$ stimmen alle drei Unterräume überein und sind isomorph zum Körper, kommutieren also. Dass die Dreiecksmatrizen für andere $n \in \mathbb{N}$ nicht kommutieren zeigt schon das Beispiel im Beweis von Lemma 15.30. Die Diagonalmatrizen bilden für beliebige $n \in \mathbb{N}$ einen kommutativen Ring. Bei Multiplikation von rechts skaliert eine Diagonalmatrix die Spalten der linken Matrix mit ihren entsprechenden Hauptdiagonaleinträgen. Bei Multiplikation von links wird zeilenweise skaliert. Das liefert für allgemeine Matrizen nicht den gleichen Effekt, wie man am folgenden Beispiel sieht:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = 0 \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Für Diagonalmatrizen stimmt aber die j-te Spalte immer mit der j-ten Zeile überein, hier werden also die Hauptdiagonalen komponentenweise multipliziert. (1 Punkt)

(e) **Beachte:** Die Multiplikation mit Matrizen der vorliegenden Form von rechts bzw. links vertauscht in dem anderen Faktor Spalten bzw. Zeilen, sie permutieren also die Indexmengen der Spalten und Zeilen, sie werden daher Permutationsmatrizen genannt.

Eine Permutation $f \in S_n$ der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ f(1) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

können wir mit der Matrix $\Phi(f)$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = f(j) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

aus P identifizieren. Die 1-Einträge sind also genau die $a_{f(j),j}$ für $j \in [\![1, n]\!]$. Die Matrix A ist also spaltenweise aus Einheitsvektoren durch $A = (e_{f(1)}, \dots, e_{f(n)})$ aufgebaut.

Die Bijektivität dieser Abbildung ist offensichtlich, und lässt sich an Hand der Umkehrabbildung leicht verifizieren. Eine Matrix $A \in P$ besitzt zu jedem Index $j \in [\![1, n]\!]$ genau einen Index $\ell_j \in [\![1, n]\!]$ mit $a_{\ell_j j} = 1$, wobei die l_j paarweise verschieden sein müssen. Zu $A \in P$ gehört also die Permutation

$$\Phi^{-1}(A) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}.$$

Es seien nun Permutationen $f, g \in S_n$ gegeben. Aus der spaltenweise Interpretation der Matrixmultiplikation folgt sofort, dass für alle Spaltenindizes $j \in [\![1, n]\!]$ gilt

$$(\Phi(f)\,\Phi(g))_{\bullet j} = \Phi(f)_{\bullet g(j)}$$

also hat $\Phi(f)\,\Phi(g)$ in der j-ten Spalte genau am Zeilenindex $f(g(j))$ eine 1, entspricht also $\Phi(f \circ g)$. Da die Mengen isomorph sind und die Abbildung strukturverträglich folgt sofort, dass auch P mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet. (1 Punkt)

Beachte: Es besteht grundsätzlich auch die Möglichkeit, die Permutationsmatrizen zeilenweise statt spaltenweise mit ihren Permutationen der S_n zu identifizieren. Dann muss man auf den Permutationsmatrizen die Multiplikation aber genau mit umgekehrter Reihenfolge der Matrizen definieren, sonst erhält man einen Antihomomorphismus. Die hier vorgestellte Variante ist auch attraktiv, weil der Urbildvektor in der Zweizeilenform der Permutation, also $(1, \dots, n)$ durch Multiplikation mit $\Phi(f)$ gerade auf den Bildvektor, also $(f(1), \dots, f(n))$ abgebildet wird.

Wir wissen nun, dass Gruppenhomomorphismen mit Inversenbildung verträglich sind, und dass Transpositionen in der S_n selbstinvers sind, was entsprechend auch in P gilt. Die Permutationen der S_n besitzen Zerlegungen in Transpositionen, für A mit einer Zerlegung der Permutation $\Phi^{-1}(A) = \tau_1 \circ \dots, \tau_k$, erhalten wir also, dass

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \Phi(\Phi^{-1}(A^{-1})) = \Phi(\Phi^{-1}(A)^{-1}) = \Phi((\tau_1 \circ \dots, \tau_k)^{-1}) = \Phi(\tau_k) \cdot \dots \cdot \Phi(\tau_1) \\ &= \Phi(\tau_k)^\intercal \cdot \dots \cdot \Phi(\tau_1)^\intercal = (\Phi(\tau_1) \cdot \dots \cdot \Phi(\tau_k))^\intercal = \Phi(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k)^\intercal = A^\intercal. \end{aligned}$$

(0.5 Punkte)

Um für die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

eine Zerlegung in Transpositionsmatrizen (Elementarmatrizen vom Typ III) – das sind natürlich genau die zu den Transpositionspermutationen der S_n gehörigen Bilder unter Φ – zu bestimmen, haben wir nun vier Möglichkeiten. Entweder arbeiten wir mit der Matrix selbst oder mit der dazugehörigen Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Arbeiten wir mit der Matrix, dann bestimmen wir die Transpositionsmatrizen (bzw. deren Inverse, alle sind selbstinvers), die wir benötigen, um durch Multiplikation von rechts bzw. links, sukzessive Spalten bzw. Zeilen zu tauschen, so dass die Einheitsmatrix entsteht. Arbeiten wir mit der Permutation, dann bestimmen wir wie in Hausaufgabe 4.5 eine Zerlegung durch Tauschen im Urbild- oder Bildbereich der Permutation und bilden die gefundene Zerlegung auf Matrizen ab, was dann spaltenweisen bzw. zeilenweisen Vorgehensweise bei der Matrix entspricht.

Wir geben hier die beiden Varianten für das arbeiten mit der Matrix an, weil die Lösung im Rahmen der S_n sehr analog zu Hausaufgabe 4.5 geht. Wir notieren dabei die Transpositionsmatrizen, die die i-te und j-te Spalte bzw. Zeile tauscht mit T_{ij}. Einmal erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= T_{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= T_{12} T_{24} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= T_{12} T_{24} T_{34} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= T_{12} T_{24} T_{34} T_{45}.
\end{aligned}$$

Alternativ erhalten wir bei Bearbeitung der Spalten (von rechts)

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T_{13} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T_{23} T_{13} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} T_{34} T_{23} T_{13} \\
&= T_{45} T_{34} T_{23} T_{13}.
\end{aligned}$$

Und wieder sehen wir, dass die Zerlegungen in Transpositionen nicht eindeutig sind. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe 11.2 (Allgemeine lineare Gruppe) 1 + 3 = 4 Punkte

(a) Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, K)$ genau dann endlich ist, wenn K endlich ist.

(b) (i) Bestimmen Sie alle Elemente der $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

Hinweis: Überführen Sie ein allgemeines $A \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ in Zeilenstufenform und unterscheiden Sie geeignete Fälle.

(ii) Bestimmen Sie die Ordnung für alle Elemente aus $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$ nicht kommutativ ist.

Lösung.

(a) Wenn K ein endlicher Körper ist, dann ist schon die Menge aller Matrizen $K^{n\times n}$ endlich mit $\#K^{(n^2)}$ Elementen, die Teilmenge $\mathrm{GL}(n, K)$ ist entsprechend ebenfalls endlich. (0.5 Punkte)

Ist K ein nicht endlicher Körper, dann ist für jedes $\alpha \in K$ die Matrix der Form

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

invertierbar, also in der $\mathrm{GL}(n, K)$, welche damit mindestens so mächtig ist, wie der Körper selbst. (0.5 Punkte)

(b) (i) Eine Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn sie Vollrang 2 hat. Entsprechend können a und c nicht gleichzeitig 0 sein. Es ergeben sich also die folgenden Möglichkeiten.

Fall 1: $a = 0$ und $c \neq 0$, also $c = 1$. Dann ergibt sich nach erneuter Anwendung des Vollrangarguments auf die Zeilen der Matrix, dass b nicht Null sein darf, also $b = 1$ sein muss. Hier ergeben sich die Matrizen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fall 2: Für $a = 1$ und $c = 0$ erhalten wir analog die Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fall 3: Für $a = c = 1$ dürfen nun b und d nicht übereinstimmen, da die Zeilen sonst linear abhängig sind und damit der Rang $1 < 2$ ist. Es ergeben sich

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1.5 Punkte)

(ii) Wir wissen bereits jetzt aus dem Satz von Lagrange, dass die Ordnungen der Matrizen Teiler von 6 sein müssen, also nur die Ordnungen $1, 2, 3, 6$ auftreten können. Ordnung 6 kann nur dann auftreten, wenn die Gruppe zyklisch erzeugt ist. Es ergeben sich:

Ordnung 1: Natürlich nur die Einheitsmatrix (das neutrale Element)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ordnung 2: Alle selbstinversen Elemente, also schonmal die (einzige) Transpositionsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Außerdem die beiden oberen und unteren Dreiecksmatrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2$$

Ordnung 3: Hierunter fallen die verbleibenden Antidiagonalmatrizen, denn

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3.$$

(1 Punkt)

(iii) Hier kann man sehen, dass sogar die invertierbaren Matrizen im Allgemeinen nicht miteinander kommutieren. Ein einfaches Beispiel findet man, wenn man nutzt, dass die Transpositionsmatrizen von links bzw. rechts die Zeilen bzw. die Spalten vertauschen, was i. A. nicht die gleiche Transformation des anderen Faktors ist. Es ist z. B.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(0.5 Punkte)

Hausaufgabe 11.3 (Beispiele linearer Gleichungssysteme) 4 + 2 = 6 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für

(i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ in Abhängigkeit von r, s;

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$ über $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$ in Abhängigkeit von z.

(b) Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}_3[t]$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Basen

$$B_1 := \{1 + t^2 + t^3,\ t + 2\,t^2 + t^3,\ 1 + t^3,\ 2\,t + t^2 + t^3\}$$
$$B_2 := \{2 + t^2,\ 3\,t + 2\,t^3,\ 1 + 2\,t + 3\,t^2 + t^3,\ 1 + t + t^2 + 5\,t^3\}$$

Bestimmen Sie die Linearkombinationskoeffizienten der Elemente in B_2 bezüglich B_1, indem Sie das dazugehörige lineare Gleichungssystem mit mehreren rechten Seiten aufstellen und lösen.

Lösung.

(a) (i) Wir stellen die erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems auf und überführen Sie in Zeilenstufenform.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -8 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & r \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -8 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & r \\ 0 & -1 & -1 & 1 & r-8 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & r \\ 0 & -1 & -1 & 1 & r-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4r-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{array}\right]$$

Hier sehen wir, dass der Rang von A genau dann dem von $A|b$ entspricht, wenn $s = 0$ und $r = 2$ ist. Ansonsten ist das Gleichungssystem nicht lösbar. In dem Fall erkennen wir sofort, dass der Rang des Systems 2 ist, also haben wir einen $4 - 2 = 2$-dimensionalen affinen Lösungsraum. Für diesen Fall führen das System in die reduzierte Zeilenstufenform und erhalten

$$\begin{array}{r} \cdot(-\frac{1}{2}) \to \\ \cdot(-1) \to \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die abhängigen Variablen gehören zu den Indizes aus $\{1, 2\}$, die unabhängigen zu denen aus $\{3, 4\}$. Wir erhalten also eine Partikulärlösung durch

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für das homogene System

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

erhalten wir $x_2 = x_4 - x_3$ und $x_1 = -\frac{1}{2}(x_3 + x_4)$, also ist eine Basis des Lösungsraum durch die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben und die gesamte Lösungsmenge ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \\ \beta - \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

(2 Punkte)

(ii) Wir stellen die erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems auf und überführen Sie in Zeilenstufenform.

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 2 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & z \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{c} \\ \\ 3 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z+3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right]$$

Hier sehen wir, dass der Rang von A genau dann dem von $A|b$ entspricht, wenn $z = 0$ ist. Nur dann ist das System lösbar. In dem Fall erkennen wir sofort, dass der Rang des Systems 2 ist, also haben wir einen $4 - 2 = 2$-dimensionalen affinen Lösungsraum. Für diesen Fall führen das System in die reduzierte Zeilenstufenform und erhalten

$$\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{c} 3 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Die abhängigen Variablen gehören zu den Indizes aus $\{1, 4\}$, die unabhängigen zu denen aus $\{2, 3\}$. Wir erhalten also eine Partikulärlösung durch

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für das homogene System

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

erhalten wir $x_4 = 0$ und $x_1 = 2x_2 + 4x_3$ und damit die Lösungsmenge

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha + 4\beta \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_5 \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

(2 Punkte)

(b) Für jedes $p_i^{(2)} \in B_2$, $i = 0, \dots, 3$ gilt es, die Koeffizienten x_k^i der Kombination

$$p_i^{(2)} = \sum_{k=0}^{4} x_k^{(i)} p_k^{(1)}, \; i = 0, \dots, 4$$

zu bestimmen, also das lineare Gleichungssystem mit mehreren rechten Seiten in dem die Koeffizienten der Polynome spaltenweise auftauchen, also

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Wie in der letzten Teilaufgabe überführt man das System in die Zeilenstufenform via

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Hier kann man nun den Vollrang der Matrix schon erkennen und damit die Invertierbarkeit überprüfen. Wir transformieren nun weiter in die reduzierte Zeilenstufenform (und invertieren damit letztendlich die Matrix).

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Auf der rechten Seite steht nun die Inverse der Systemmatrix angewandt auf die Matrix der rechten Seiten, und damit (spaltenweise) die Koeffizienten der Linearkombinationen. (2 Punkte)

Hausaufgabe 11.4 (Resultate zu Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme) 1 + 1 + 1 = 3 Punkte

Es sei K ein Körper und $n, m, k \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{n\times m}$ und $b \in K^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(A, b)$ genau dann ein Unterraum von K^m ist, wenn $b = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $M \in K^{k\times n}$ gilt:

$$\mathcal{L}(MA, Mb) = \mathcal{L}(A, b + \mathcal{L}(M, 0)) := \bigcup_{c\in\mathcal{L}(M,0)} \mathcal{L}(A, b + c).$$

(c) Zeigen Sie, dass für alle $M \in K^{m\times k}$ gilt:

$$\mathcal{L}(AM, b) = \mathcal{L}(M, \mathcal{L}(A, b)) := \bigcup_{c\in\mathcal{L}(A,b)} \mathcal{L}(M, c).$$

Lösung.

(a) Wenn $\mathcal{L}(A, b)$ ein Unterraum ist, dann liegt die 0 darin, also ist $A0 = 0 = b$. Dass es sich in diesem Fall tatsächlich um einen Unterraum handelt ist in Satz 16.3 nachgewiesen. (1 Punkt)

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(MA, Mb) &= \{x \in K^m \mid MA\,x = Mb\} \\ &= \{x \in K^m \mid M(A\,x - b) = 0\} \\ &= \{x \in K^m \mid A\,x - b \in \mathcal{L}(M, 0)\} \\ &= \{x \in K^m \mid \exists c \in \mathcal{L}(M, 0) \text{ mit } A\,x - b = c\} \\ &= \bigcup_{c \in \mathcal{L}(M,0)} \mathcal{L}(A, b + c).\end{aligned}$$

(1 Punkt)

(c) Es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(AM, b) &= \{x \in K^k \mid AM\,x = b\} \\ &= \{x \in K^k \mid M\,x \in \mathcal{L}(A, b)\} \\ &= \{x \in K^k \mid \exists c \in \mathcal{L}(A, b) \text{ mit } M\,x = c\} \\ &= \bigcup_{c \in \mathcal{L}(A,b)} \{x \in K^k \mid M\,x = c\} \\ &= \bigcup_{c \in \mathcal{L}(A,b)} \mathcal{L}(M, c).\end{aligned}$$

(1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.