R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 10

Ausgabedatum: 8. Januar 2024
Abgabedatum: 15. Januar 2024

Hausaufgabe 10.1 (Basics zu Matrizen) 1.5 + 0.5 + 3 + 1 + 3 = 9 Punkte

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen:

$$A_0\colon [\![1,1]\!] \times [\![1,1]\!] \ni (i,j) \mapsto 1, \qquad A_1\colon [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 1, & i+j=5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A_2\colon [\![1,3]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 2, & i=j \\ 1, & |i-j|=2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_3\colon [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] \ni (i,j) \mapsto i+j-2$$

$$A_4\colon [\![1,6]\!] \times [\![1,3]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_5\colon [\![1,3]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto i$$

(a) Geben Sie die explizite, elementweise Form (15.1 aus dem Skript) der Matrizen an.

(b) Entscheiden Sie, welche der Matrizen quadratisch, Diagonalmatrizen und Einheitsmatrizen sind.

(c) Geben Sie für jedes $k \in [\![0,5]\!]$ zu dem dazugehörigen A_k (wenn möglich) die k-te Spalte, k-te Zeile und die Einträge entlang der k-ten Diagonalen als Vektor an.

(d) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0,5]\!]$ die Summe $A_k + A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Summen für die Fälle $k \neq l$.

(e) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0,5]\!]$ das Produkt $A_k\, A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Produkte für die Fälle $k \neq l$. **Hinweis:** Arbeiten Sie schon hier möglichst spalten- und zeilenweise.

Hausaufgabe 10.2 (Mehr zu spalten-/zeilenweiser Matrixmultiplikation) 2 + 2 = 4 Punkte

(a) Gegeben sei die Matrix

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

und $n \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie verbal, wie die Produkte

$$B\,A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{3\times n} \qquad \text{und} \qquad A\,B \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n\times 2}$$

aus den Zeilen bzw. Spalten der Matrizen A zusammengesetzt sind.

(b) Geben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ an, die für beliebige $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ beide folgenden Bedingungen erfüllt. Entscheiden und erklären Sie, ob die Matrix B eindeutig bestimmt ist.

- Die erste Spalte von $A\,B$ ist gegeben durch die Summe der ersten Spalte und der vierfachen letzten Spalte von A und die letzte Spalte von $A\,B$ ist gegeben durch ein vielfaches der Summe aller Spalten von A.

- Die zweite und dritte Zeile von $B\,A$ sind die Summe des zweifachen der zweiten Zeile von A und des (-3)-fachen der dritten Zeile von A.

Hausaufgabe 10.3 (Elementarmatrizen, Rang und Zeilenstufenform) 0.5 + 0.5 + 3 = 4 Punkte

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie zu jeder Elementarmatrix D, S, T vom Typ I-III eine entsprechende Elementarmatrix D', S', T' an, für die $D'\,D = S'\,S = T'\,T = I$ gilt.

(b) Beschreiben Sie, was die Elementarmatrizen vom Typ I-III bei Multiplikation von rechts bewirken.

(c) Bestimmen Sie den Rang und eine Rangfaktorisierung der folgenden Matrizen:

(i) $\begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$

Hinweis: Nutzen Sie Algorithmus 15.20 und Bemerkung 15.23.

Hausaufgabe 10.4 (Transposition und (Anti-)Symmetrie) 3.5 + 0.5 = 4 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Wenn die Charakteristik $\operatorname{char}(K) \neq 2$ ist, dann sind $K^{n\times n}_{\text{sym}}$ und $K^{n\times n}_{\text{skew}}$ Unterräume von $K^{n\times n}$ der Dimensionen

$$\dim(K^{n\times n}_{\text{sym}}) = \frac{1}{2} n\,(n+1)$$
$$\dim(K^{n\times n}_{\text{skew}}) = \frac{1}{2} n\,(n-1),$$

und es gilt

$$K^{n\times n} = K^{n\times n}_{\text{sym}} \oplus K^{n\times n}_{\text{skew}}$$

(Lemma 15.29). Geben Sie dazu die eindeutige Zerlegung $A = A_{\text{sym}} + A_{\text{skew}}$ für $A \in K^{n\times n}$ an.

(b) Wenn die Charakteristik $\operatorname{char}(K) = 2$ ist (z. B. $K = \mathbb{Z}_2$), dann ist $K^{n\times n}_{\text{sym}} = K^{n\times n}_{\text{skew}}$. Was ist die Dimension von $K^{n\times n}_{\text{sym}} = K^{n\times n}_{\text{skew}}$ in diesem Fall?

Hausaufgabe 10.5 (Transposition kann nicht durch Matrixmultiplikation dargestellt werden) 3 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass genau dann Matrizen $S, T \in K^{m\times n}$ existieren, so dass $S\,A\,T = A^\mathsf{T}$ für alle $A \in K^{n\times m}$, wenn $n = m = 1$.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathbb{K}^{n\times m} \ni E_{ij} = \underbrace{e_i}_{\in K^{n\times 1}} \underbrace{e_j^\mathsf{T}}_{\in K^{1\times m}}$ und untersuchen Sie diese Matrizen in der Rolle von A um einen Widerspruch zu erhalten.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.