Übung 10 - Lösung

Ausgabedatum: 8. Januar 2024
Abgabedatum: 15. Januar 2024

Hausaufgabe 10.1 (Basics zu Matrizen) 1.5 + 0.5 + 3 + 1 + 3 = 9 Punkte

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen:

$$A_0 \colon [\![1,1]\!] \times [\![1,1]\!] \ni (i,j) \mapsto 1, \qquad A_1 \colon [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 1, & i+j=5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A_2 \colon [\![1,3]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 2, & i=j \\ 1, & |i-j|=2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_3 \colon [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] \ni (i,j) \mapsto i+j-2$$

$$A_4 \colon [\![1,6]\!] \times [\![1,3]\!] \ni (i,j) \mapsto \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad A_5 \colon [\![1,3]\!] \times [\![1,6]\!] \ni (i,j) \mapsto i$$

(a) Geben Sie die explizite, elementweise Form (15.1 aus dem Skript) der Matrizen an.

(b) Entscheiden Sie, welche der Matrizen quadratisch, Diagonalmatrizen und Einheitsmatrizen sind.

(c) Geben Sie für jedes $k \in [\![0,5]\!]$ zu dem dazugehörigen A_k (wenn möglich) die k-te Spalte, k-te Zeile und die Einträge entlang der k-ten Diagonalen als Vektor an.

(d) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0,5]\!]$ die Summe $A_k + A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Summen für die Fälle $k \neq l$.

(e) Entscheiden Sie, für welche $k, l \in [\![0,5]\!]$ das Produkt $A_k\, A_l$ gebildet werden kann, und berechnen Sie die entsprechenden Produkte für die Fälle $k \neq l$. **Hinweis:** Arbeiten Sie schon hier möglichst spalten- und zeilenweise.

Lösung.

(a) Um die „Tableau-Form“ der Matrizen zu erhalten, wertet man einfach die gegebene Vorschrift an jedem benötigten Indexpaar aus. Dabei können bestimmte Indexkombinationen in Abhängigkeit von der Struktur der Vorschrift natürlich ausgelassen werden. Bei dem ersten Beispiel ist die Abbildung ja bspw. konstant, hier kann man also einfach die konstante Einsmatrix der passenden Dimension hinschreiben.

Die Matrizen haben die Form

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(1.5 Punkte)

(b) Quadratisch sind entsprechend die Matrizen $A_0 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und $A_1, A_3 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Diagonalmatrizen sind die Matrizen A_0 und A_4. Davon ist A_0 die einzige Einheitsmatrix. (0.5 Punkte)

(c) k=0: Die 0-te Spalte und Zeile von A_0 existiert nicht. Es ist aber die Hauptdiagonale die 0-te Diagonale und in diesem Fall also lediglich $a_{11} = \big(1\big)$. (0.5 Punkte)

k=1: Die Einträge entlang der ersten Diagonalen von A_1 in Vektorschreibweise sind gegeben als

$$(a_{12}, \ldots, a_{34}) = (0, 1, 0).$$

Die erste Spalte und Zeile von A_1 sind gegeben durch

$$[\![1, 4]\!] \ni i \longrightarrow a_{i1} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\![1, 4]\!] \ni j \longrightarrow a_{1j} \quad \text{also} \ \big(0, 0, 0, 1\big)\,.$$

(0.5 Punkte)

k=2: Die Einträge entlang der zweiten Diagonalen von A_2 in Vektorschreibweise sind gegeben als

$$(a_{13}, \ldots, a_{35}) = (1, 1, 1).$$

Die zweite Spalte und Zeile von A_2 ist gegeben durch

$$[\![1, 3]\!] \ni i \longrightarrow a_{i2} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$[\![1, 6]\!] \ni j \longrightarrow a_{2j} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(0.5 Punkte)

k=3: Die Einträge entlang der dritten Diagonalen von A_3 in Vektorschreibweise sind gegeben als

$$(a_{14}, \ldots, a_{14}) = (3).$$

Die dritte Spalte und Zeile von A_3 ist gegeben durch

$$[\![1, 4]\!] \ni i \longrightarrow a_{i3} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$[\![1, 4]\!] \ni j \longrightarrow a_{3j} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(0.5 Punkte)

k=4: Die vierte Diagonale von A_4 existiert nicht. Die vierte Spalte existiert ebenfalls nicht, die vierte Zeile von A_4 ist gegeben durch

$$[\![1, 3]\!] \ni j \longrightarrow a_{4j} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(0.5 Punkte)

k=5: Die Einträge entlang der fünften Diagonalen von A_5 in Vektorschreibweise sind gegeben als

$$(a_{16}, \ldots, a_{16}) = (1).$$

Die fünfte Zeile existiert nicht, die fünfte Spalte von A_3 ist gegeben durch

$$[\![1,3]\!] \ni i \longrightarrow a_{i5} \quad \text{also} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(0.5 Punkte)

(d) Matrizen können genau dann addiert werden, wenn sie die gleichen Dimensionen haben. Insbesondere kann die Summe jeder Matrix mit sich selbst gebildet werden. Außerdem ist die Matrixaddition kommutativ, jede mögliche Summe kann also auch mit vertauschten Indizes gebildet werden. Berechnet werden muss also

$$A_1 + A_3 = A_3 + A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 + A_5 = A_5 + A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1 Punkt)

(e) Matrizen können genau dann multipliziert werden, wenn die innere Dimension übereinstimmt. Insbesondere können Matrizen genau dann mit sich selbst multipliziert werden, wenn sie quadratisch sind. Zusätzlich sind die folgenden Kombinationen möglich

$$A_1 A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (A_1 \text{ tauscht die Zeilenreihenfolge})$$

$$A_3 A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad (A_1 \text{ tauscht die Spaltenreihenfolge})$$

$$A_4 A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A_4 \text{ erhält Zeilen und füllt mit 0 auf})$$

$$A_4 A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A_4 \text{ erhält Zeilen und füllt mit 0 auf})$$

$$A_2\,A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (A_4 \text{ wählt die ersten Spalten aus})$$

$$A_5\,A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad (A_4 \text{ wählt die ersten Spalten aus})$$

(3 Punkte)

Hausaufgabe 10.2 (Mehr zu spalten-/zeilenweiser Matrixmultiplikation) 2 + 2 = 4 Punkte

(a) Gegeben sei die Matrix

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

und $n \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie verbal, wie die Produkte

$$B\,A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{3\times n} \qquad \text{und} \qquad A\,B \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n\times 2}$$

aus den Zeilen bzw. Spalten der Matrizen A zusammengesetzt sind.

(b) Geben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ an, die für beliebige $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ beide folgenden Bedingungen erfüllt. Entscheiden und erklären Sie, ob die Matrix B eindeutig bestimmt ist.

- Die erste Spalte von $A\,B$ ist gegeben durch die Summe der ersten Spalte und der vierfachen letzten Spalte von A und die letzte Spalte von $A\,B$ ist gegeben durch ein vielfaches der Summe aller Spalten von A.

- Die zweite und dritte Zeile von $B\,A$ sind die Summe des zweifachen der zweiten Zeile von A und des (-3)-fachen der dritten Zeile von A.

Lösung.

(a) Das Produkt $B\,A$ liegt in $\mathbb{R}^{2\times n}$, hat also zwei Zeilen. In der ersten Zeile von BA steht die Summe aus der ersten und dem (-3)-fachen der letzten Zeile von A. In der zweiten Zeile von BA steht die Summe aus dem (-2)-fachen der ersten Zeile und dem vierfachen der letzten Zeile von A.

Das Produkt $A\,B$ liegt in $\mathbb{R}^{n\times 3}$, hat also drei Spalten. In der ersten Spalte von AB steht die Summe der ersten Spalte und dem (-2)-fachen der zweiten Spalte von A, die zweite Spalte ist eine

Nullspalte und die letzte Spalte die Summe des (-3)-fachen der ersten und dem vierfachen der zweiten Spalte von A. (2 Punkte)

(b) Die gesuchte Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ist von der Gestalt

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

mit reellen Einträgen, die es zu bestimmen gilt. Die Informationen über die erste Spalte des Produkts $A\,B$ liefert schonmal

$$B = \begin{bmatrix} 1 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 4 & ? & ? \end{bmatrix}$$

und die Informationen über die letzte Spalte liefert

$$B = \begin{bmatrix} 1 & ? & a \\ 0 & ? & a \\ 0 & ? & a \\ 4 & ? & a \end{bmatrix}$$

für ein $a \in \mathbb{R}$.

Mit den Informationen über die zweite und dritte Zeile von $B\,A$ erhalten wir analog

$$B = \begin{bmatrix} 1 & ? & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & ? & -3 \end{bmatrix}$$

und damit keine eindeutige Matrix, man kann die beiden verbleibenden Einträge beliebig in $\mathbb{R}$ wählen um Matrizen der gesuchten Form zu erhalten. (2 Punkte)

Hausaufgabe 10.3 (Elementarmatrizen, Rang und Zeilenstufenform) 0.5 + 0.5 + 3 = 4 Punkte

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie zu jeder Elementarmatrix D, S, T vom Typ I-III eine entsprechende Elementarmatrix D', S', T' an, für die $D'\,D = S'\,S = T'\,T = I$ gilt.

(b) Beschreiben Sie, was die Elementarmatrizen vom Typ I-III bei Multiplikation von rechts bewirken.

(c) Bestimmen Sie den Rang und eine Rangfaktorisierung der folgenden Matrizen:

(i) $\begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$

Hinweis: Nutzen Sie Algorithmus 15.20 und **??**.

Lösung.

(a) Die Form der Matrizen ist offensichtlich, wenn man sich überlegt, wie die zeilenweise Modifikation, die durch die Multiplikation mit den Elementarmatrizen dargestellt wird, rückgängig macht.

Typ I: Für

$$D := \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = I + (\alpha - 1)\, E_{ii} \quad \text{ist} \quad D' := \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{\alpha} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = I + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) E_{ii}.$$

Typ II: Für

$$S := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = I + \alpha\, E_{ij} \quad \text{ist} \quad S' := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & -\alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = I - \alpha\, E_{ij}$$

Für Matrizen T vom Typ III gilt $T' = T$.

Überprüfen lässt sich das schnell durch Matrixmultiplikation. (0.5 Punkte)

(b) Bei Multiplikation von Rechts modifizieren die Elementarmatrizen den jeweils anderen Faktor spaltenweise, statt zeilenweise, also Typ I skaliert spalten und Typ III tauscht Spalten. Aufpassen muss man lediglich mit den Matrizen vom Typ II, denn von Links multipliziert addiert $I + E_{ij}$ die j-te Zeile auf die i-te Zeile, von rechts multpliziert dreht sich aber die Reihenfolge, hier wird die i-te Spalte auf die j-te Spalte addiert. (0.5 Punkte)

(c) Mit den bisherigen Teilaufgaben ist klar, wie man Algorithmus 15.20 modifizieren muss, um, statt nur einer Zeilenstufenform zu erhalten, eine volle Rangfaktorisierung zu erhalten. Dafür merkt man sich in jedem Transformationsschritt zur Zeilenstufenform die jeweils umkehrenden Elementarmatrizen, bildet deren Produkt und streicht am Ende noch überflüssigen Zeilen und Spalten.

Die unten stehenden Lösungen habe alle die Struktur, dass wir mit der zu untersuchenden Matrix A starten, und eine Identität als $A = IA$ ergänzen. Zwischen der linken Matrix (anfangs I) und der rechten Matrix (anfangs A) ergänzen wir dann sukzessive Elementarmatrizen und ihre Umkehrung (ihre Inverse) und multiplizieren dann die rechte Elementarmatrix von links an die rechte Matrix und die linke Elementarmatrix von rechts an die linke Matrix. Dieses Vorgehen entspricht dem, was man in Implementierungen umsetzen würde, um Speicher zu sparen. Siehe auch **??**. Um Platz zu sparen schreiben wir dabei die Produkte von Elementarmatrizen des Typ II zu verschiedenen Zeilensummen zusammen.

(i) Es ist

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Entsprechend ist der Rang 2, wie man an der inneren Dimension der Rangfaktorisierung abliest. (1.5 Punkte)

(*ii*) Wir können analog zur ersten Teilaufgabe vorgehen, benötigen jetzt aber die entsprechenden Rechenoperationen in $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=I} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

was schon die fertige Rangfaktorisierung ist, und der Rang ist 3. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe 10.4 (Transposition und (Anti-)Symmetrie) 3.5 + 0.5 = 4 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Wenn die Charakteristik $\operatorname{char}(K) \neq 2$ ist, dann sind $K^{n\times n}_{\text{sym}}$ und $K^{n\times n}_{\text{skew}}$ Unterräume von $K^{n\times n}$ der Dimensionen

$$\begin{aligned}
\dim(K^{n\times n}_{\text{sym}}) &= \frac{1}{2} n\,(n+1) \\
\dim(K^{n\times n}_{\text{skew}}) &= \frac{1}{2} n\,(n-1),
\end{aligned}$$

und es gilt

$$K^{n\times n} = K^{n\times n}_{\text{sym}} \oplus K^{n\times n}_{\text{skew}}$$

(Lemma 15.29). Geben Sie dazu die eindeutige Zerlegung $A = A_{\text{sym}} + A_{\text{skew}}$ für $A \in K^{n\times n}$ an.

(b) Wenn die Charakteristik $\operatorname{char}(K) = 2$ ist (z. B. $K = \mathbb{Z}_2$), dann ist $K^{n\times n}_{\text{sym}} = K^{n\times n}_{\text{skew}}$. Was ist die Dimension von $K^{n\times n}_{\text{sym}} = K^{n\times n}_{\text{skew}}$ in diesem Fall?

Lösung.

Wir zeigen als kurzes Hilfsresultat, dass genau dann $\operatorname{char}(K) = 2$ gilt, wenn jedes Element von K selbstinvers ist. Die Rückrichtung dieser Aussage ist offensichtlich (denn das gilt ja dann auch für die 1, an Hand der die Charakteristik definiert ist). Für die Hinrichtung sei $a \in K$, dann ist wegen $a + a = a \cdot (1 + 1) = a \cdot 0 = 0$ auch $a = -a$.

(a) Offensichtlich liegt die Nullmatrix in beiden Mengen (sie ist sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch). Beide Mengen sind also nichtleer. Für $A, B \in K^{n\times n}_{\text{sym}}$ und $\alpha, \beta \in K$ ist außerdem auf Grund der komponentenweise Multiplikation und Addition

$$(\alpha A + \beta B)^\intercal = (\alpha A)^\intercal + (\beta B)^\intercal = \alpha A^\intercal + \beta B^\intercal = \alpha A + \beta B.$$

Weiterhin ist für $A, B \in K^{n\times n}_{\text{skew}}$ und $\alpha, \beta \in K$ wieder auf Grund der komponentenweise Multiplikation und Addition

$$(\alpha A + \beta B)^\intercal = (\alpha A)^\intercal + (\beta B)^\intercal = \alpha A^\intercal + \beta B^\intercal = -\alpha A - \beta B = -(\alpha A + \beta B).$$

Entsprechend sind beide Mengen abgeschlossen bzgl. der Vektorraumoperationen und somit, nach dem Unterraumkriterium, Unterräume. (0.5 Punkte)

Weiterhin gilt $K^{n\times n}_{\text{sym}} \cap K^{n\times n}_{\text{skew}} = \{0\}$, da die Charakteristik des Körpers eingeschränkt ist. Eine Matrix die sowohl symmetrisch, als auch antisymmetrisch ist besteht nämlich nur aus (additiv) selbstinversen Elementen. Für jeden Körper erfüllt die 0 diese Eigenschaft und wie oben gezeigt gibt es auf Grund der Charakteristikeinschränkung des Körpers kein weitere selbstinverses Element. (0.5 Punkte)

Um die Dimensionsaussage zu zeigen, zeigen wir lediglich, dass

$$\dim(K^{n\times n}_{\text{sym}}) = \frac{1}{2} n\,(n+1),$$

denn dann folgt auf Grund der Dimensionsformel in Satz 14.3 und der noch zu zeigenden Summeneigenschaft sofort, dass

$$n^2 = \dim_K(K^{n\times n}) = \dim_K(K^{n\times n}_{\text{sym}}) + \dim_K(K^{n\times n}_{\text{skew}}) + \dim_K(K^{n\times n}_{\text{sym}} \cap K^{n\times n}_{\text{skew}}) = \frac{1}{2} n\,(n+1) + \dim_K(K^{n\times n}_{\text{skew}}) + 0$$

und damit $\dim_K(K^{n\times n}_{\text{skew}}) = n^2 - \frac{1}{2} n\,(n+1) = \frac{1}{2} n\,(n-1)$. (0.5 Punkte)

Dafür zeigen wir, dass die Menge

$$B_{\text{sym}} := \{E_{ii} \mid i \in [\![1, n]\!]\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \mid (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i < j\}$$

eine Basis von $K^{n\times n}_{\text{sym}}$ ist. Das sind gerade die symmetrischen Matrizen, die entweder auf der Hauptdiagonalen eine 1 stehen haben, oder je eine 1 passend symmetrisch auf den Nebendiagonalen

stehen haben, also Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Für die symmetrischen Matrizen bildet diese Menge so etwas wie die Standardbasis, denn jede symmetrische Matrix A lässt sich dann schreiben als

$$A = \sum_{i<j=1}^{n} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii}$$

daher ist B_{sym} erzeugend, und die Kombination is offensichtlich eindeutig. Da es sich bei B_{sym} um eine Menge mit $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$ Elementen handelt ist diese Dimension also klar. (1 Punkt)

Die Standardbasis B_{skew} von $K^{n\times n}_{\text{skew}}$ ist in diesem Fall entsprechend natürlich durch

$$B_{\text{skew}} := \{E_{ij} - E_{ji} \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j\}$$

gegeben. Die antisymmetrischen Matrizen haben alle selbstinverse Elemente auf der Hauptdiagonalen, bei unserer eingeschränkten Charakteristik sind das also nur die Nullen, daher kann die Diagonale vernachlässigt werden. Insbesondere ist die Menge leer, wenn $n = 1$, denn dann handelt es sich bei $K^{n\times n}_{\text{skew}}$ um den Nullvektorraum.

Es verbleibt der Nachweis, dass die beiden Unterräume tatsächlich komplementär sind, dafür fehlt noch, dass ihre Summe den ganzen Raum ergibt. Dafür würde es natürlich reichen, dass B_{skew} tatsächlich eine Basis von $K^{n\times n}_{\text{skew}}$ ist, denn dann ergibt sich die Eigenschaft aus der Vereinigung der Basen mit ihren entsprechenden Kardinalitäten und der Trivialschnitteigenschaft. Es ist aber durchaus interessant, sich zu fragen, wie man eine Matrix in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt. Für ein $A \in K^{n\times n}$ findet man die Zerlegung zum Beispiel gerade durch die Form der beiden Standardbasen, denn die Darstellung einer Matrix A in der Vereinigung beider Basen liefert das Gleichungssystem

$$A = \sum_{i=1^n} \alpha_{ii}(E_{ij} + E_{ji}) + \sum_{i<j=1}^{n} \alpha_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) + \beta_{ij}(E_{ij} - E_{ji})$$

für die entsprechenden Koeffizienten α_{ij}, β_{ij}. Komponentenweise liefert das dann das System

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} + \beta_{ij} &= a_{ij} \\ \alpha_{ij} - \beta_{ij} &= a_{ji} \end{aligned}$$

für $i < j$ und damit (summieren und subtrahieren der Zeilen) die Lösungen

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$
$$\beta_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

woran man die Zerlegung

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^\intercal)}_{\in K^{n\times n}_{\text{sym}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^\intercal)}_{\in K^{n\times n}_{\text{skew}}}$$

sofort erkennt, ohne sich mit den komponentenweisen Gleichungen auf der Diagonalen genauer befassen zu müssen. **Beachte:** Wir arbeiten hier in einem Körper der Charakteristik ungleich 2. Das Element $2 \in K$ ist also Kurzschreibweise für das Element $1 + 1$, das auf Grund der Charakteristikeinschränkung nicht 0 ist, und damit invertierbar mit dem inversen Element $\frac{1}{2}$ (ebenfalls in Kurzschreibweise für $\frac{1}{1+1}$). (1 Punkt)

(b) Wenn $\operatorname{char}(K) = 2$ ist, dann ist wie oben ausgeführt jedes Element selbstinvers, daraus folgt sofort $K^{n\times n}_{\text{sym}} = K^{n\times n}_{\text{skew}}$. Die Dimension bleibt weiterhin $\frac{1}{2}n\,(n+1)$, denn die Basis von oben kann unverändert weiterverwendet werden. Hier gilt dann offensichtlich nicht mehr, dass antisymmetrische Matrizen nur Nullen auf der Diagonalen haben dürfen. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe 10.5 (Transposition kann nicht durch Matrixmultiplikation dargestellt werden) 3 Punkte

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass genau dann Matrizen $S, T \in K^{m\times n}$ existieren, so dass $S\,A\,T = A^\intercal$ für alle $A \in K^{n\times m}$, wenn $n = m = 1$.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathbb{K}^{n\times m} \ni E_{ij} = \underbrace{e_i}_{\in K^{n\times 1}} \underbrace{e_j^\intercal}_{\in K^{1\times m}}$ und untersuchen Sie diese Matrizen in der Rolle von A um einen Widerspruch zu erhalten.

Lösung.

Im Fall $n = m = 1$ sind die Matrizen offensichtlich durch $S = T = 1$ gegeben. (0.5 Punkte)

Im Fall $n + m > 2$ müsste für jede Kombination von Indizes $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, m]\!]$ entsprechend

$$E_{ji} = E_{ij}^\intercal = SE_{ij}T = Se_ie_j^\intercal T = S_{\bullet i}T_{j\bullet}$$

gelten.

Insbesondere gilt das für die Einträge zu den Indizes j, i, also muss

$$1 = (E_{ji})_{ji} = (S_{\bullet i} T_{j\bullet})_{ji} = S_{ji} T_{ji}$$

für alle Kombinationen von Indizes $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, m]\!]$ sein, also ist jeder Eintrag von S und T ungleich 0.

Für jede Kombination von Indizes $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, m]\!]$ und ein weiteres Indexpaar $(l, k) \neq (j, i)$ ist allerdings

$$0 = (E_{ji})_{lk} = (S_{\bullet i} T_{j\bullet})_{lk} = S_{li} T_{jk},$$

was einen Widerspruch ergibt. (2.5 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.