Übung 9

Ausgabedatum: 11. Dezember 2023
Abgabedatum: 8. Januar 2024

Hausaufgabe 9.1 (Lineare (Un-)abhängigkeit) 4.5 + 0.5 + 3 + 1 = 9 Punkte

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen E von Vektoren in einem Vektorraum linear (un-)abhängig sind und beweisen Sie Ihre Antwort.

(i) $E \coloneqq \{(1,2,3),(3,2,1),(1,1,1)\}$ in $(\mathbb{R}_3,+,\cdot)$ über $(\mathbb{Q},+,\cdot)$.

(ii) $E \coloneqq \{e_x \mid x \in X\} \cup \{1\}$ in $(K^X,+,\cdot)$ über einem Körper $(K,+,\cdot)$ (siehe (13.3) des Skripts).

(iii) $E \coloneqq \{1,1,2\}$ in $(\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\},+_3,\cdot_3)$ über sich selbst.

(iv) $E \coloneqq \{1,\ t-1,\ t^2-t,\dots\}$ in $(K[t],+,\cdot)$ über einem Körper $(K,+,\cdot)$.

(v) $E \coloneqq \{\{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X),\triangle,\cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2 = \{0,1\},+_2,\cdot_2)$.

(vi) $E \coloneqq \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X),\triangle,\cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2 = \{0,1\},+_2,\cdot_2)$.

(b) Zeigen Sie, dass in einer linear unabhängigen Familie von Vektoren kein Element doppelt vorkommen kann.

(c) Es seien $(V,+_V,\cdot_V)$ und $(W,+_W,\cdot_W)$ Vektorräume über einem Körper $(K,+_K,\cdot_K)$, $E \subseteq V$ sowie $F \subseteq W$ und $V \times W$ der Vektorraum mit den komponentenweisen Verknüpfungen aus Hausaufgabe 8.1. Was können Sie i. A. über die lineare (Un-)abhängigkeit der Menge $E \times F$ in $V \times W$ in den folgenden Fällen aussagen?

(i) E ist linear unabhängig in V und F ist linear unabhängig in W.

(ii) E ist linear abhängig in V und F ist linear unabhängig in W.

(iii) E ist linear abhängig in V und F ist linear abhängig in W.

(d) Es sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie Lemma 13.3 des Skripts in der Mengenformulierung, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge.

(ii) Es gibt einen Vektor $v \in E$, der als Linearkombination von $E \setminus \{v\}$ darstellbar ist.

Hausaufgabe 9.2 (Basen) 1 + 3 + 1.5 + 1.5 = 7 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass $\{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -1, -1)\}$ eine Basis des $(\mathbb{R}_3, +, \cdot)$ ist.

(b) Entscheiden Sie, welche der Beispiele aus Hausaufgabe 9.1 (a) Basen der jeweiligen Vektorräume sind und beweisen Sie Ihre Antworten.

(c) Bestimmen Sie Basen folgender (Unter-)vektorräume:

(i) $\{a + b\, i \in \mathbb{C} \mid a - 2\, b = 0\}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der Addition und (skalaren) Multiplikation in $\mathbb{C}$.

(ii) $\{f \in \mathbb{R}^{[\![1,n]\!]} \mid \sum_{i=1}^{n} f(i) = 0\}$ für $n \in \mathbb{N}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der punktweisen Addition und (skalaren) Multiplikation.

(iii) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq 2\mathbb{N},\ A \text{ endlich}\}$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ mit $\triangle$ als Addition.

(d) Geben Sie einen *konstruktiven* Beweis für die Aussage in Folgerung 13.12 im Fall endlich erzeugter Vektorräume an, also dass jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis besitzt.

Hausaufgabe 9.3 (Dimension) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

(a) Wie in Hausaufgabe 8.3 sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge, $x_0 \in X$ beliebig und $(K^X, +, \cdot)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den punktweisen Verknüpfungen sowie

$$\begin{aligned} U &\coloneqq \left\{ f \in K^X \,\middle|\, f(x_0) = 0 \right\}, \\ W &\coloneqq \left\{ f \in K^X \,\middle|\, f(x) = f(y)\ \forall x, y \in X \right\}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

(i) Zeigen Sie, dass $\dim_K(K^X) = \#X$, falls X endlich ist, und andernfalls $\dim_K(K^X) = \infty$.

(ii) Bestimmen Sie $\dim_K(U)$, $\dim_K(W)$ und $\dim_K(U \cap W)$.

(b) Es sei $(K, +_K, \cdot_K)$ ein *endlicher* Körper und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V genau dann K-endlichdimensional ist, wenn V endlich ist, und dass dann $\#V = \#K^{\dim_K(V)}$ gilt.

Hausaufgabe 9.4 (Summen von Unterräumen) 0.5 + 1 + 1.5 + 2 = 5 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass U und W in (0.1) aus Hausaufgabe 9.3 komplementär in $(K^X, +, \cdot)$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Kodimension in Definition 14.10 wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl des komplementären Unterraums.

(c) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V. Zeigen Sie Satz 14.15 des Skripts, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

(ii) Für alle $v \in V$ existiert eine endliche Teilfamilie $I_0 \subseteq I$ und Vektoren $u_i \in U_i$, sodass $v = \sum_{i \in I_0} u_i$ gilt, und diese Darstellung ist (bis auf Summanden von Nullvektoren) eindeutig.

(d) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Zeigen Sie Satz 14.16 des Skripts, also die folgenden Aussagen:

(i) Ist B eine Basis von V und $(B_i)_{i \in I}$ eine Partition von B mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt $V = \bigoplus_{i \in I} \langle B_i \rangle$.

(ii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V mit Basen B_i, $i \in I$, und gilt $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, so ist $\bigcup_{i \in I} B_i$ eine Basis von V.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.