R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 9 - Lösung

Ausgabedatum: 11. Dezember 2023
Abgabedatum: 8. Januar 2024

Hausaufgabe 9.1 (Lineare (Un-)abhängigkeit) 4.5 + 0.5 + 3 + 1 = 9 Punkte

(a) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen E von Vektoren in einem Vektorraum linear (un-)abhängig sind und beweisen Sie Ihre Antwort.

(i) $E \coloneqq \{(1,2,3),(3,2,1),(1,1,1)\}$ in $(\mathbb{R}_3,+,\cdot)$ über $(\mathbb{Q},+,\cdot)$.

(ii) $E \coloneqq \{e_x \mid x \in X\} \cup \{1\}$ in $(K^X,+,\cdot)$ über einem Körper $(K,+,\cdot)$ (siehe (13.3) des Skripts).

(iii) $E \coloneqq \{1,1,2\}$ in $(\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\},+_3,\cdot_3)$ über sich selbst.

(iv) $E \coloneqq \{1,\ t-1,\ t^2-t,\dots\}$ in $(K[t],+,\cdot)$ über einem Körper $(K,+,\cdot)$.

(v) $E \coloneqq \{\{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X),\triangle,\cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2 = \{0,1\},+_2,\cdot_2)$.

(vi) $E \coloneqq \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X),\triangle,\cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2 = \{0,1\},+_2,\cdot_2)$.

(b) Zeigen Sie, dass in einer linear unabhängigen Familie von Vektoren kein Element doppelt vorkommen kann.

(c) Es seien $(V,+_V,\cdot_V)$ und $(W,+_W,\cdot_W)$ Vektorräume über einem Körper $(K,+_K,\cdot_K)$, $E \subseteq V$ sowie $F \subseteq W$ und $V \times W$ der Vektorraum mit den komponentenweisen Verknüpfungen aus Hausaufgabe 8.1. Was können Sie i. A. über die lineare (Un-)abhängigkeit der Menge $E \times F$ in $V \times W$ in den folgenden Fällen aussagen?

(i) E ist linear unabhängig in V und F ist linear unabhängig in W.

(ii) E ist linear abhängig in V und F ist linear unabhängig in W.

(iii) E ist linear abhängig in V und F ist linear abhängig in W.

(d) Es sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie Lemma 13.3 des Skripts in der Mengenformulierung, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge.

(ii) Es gibt einen Vektor $v \in E$, der als Linearkombination von $E \setminus \{v\}$ darstellbar ist.

Lösung.

(a) (i) $E := \{(1,2,3),(3,2,1),(1,1,1)\}$ in $(\mathbb{R}_3,+,\cdot)$ über $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ist eine **linear abhängige Menge**. Entweder erkennt man durch „scharfes Hinsehen", dass

$$1(1,2,3) + 1(3,2,1) + (-4)\cdot(1,1,1) = 0$$

oder man untersucht, welche Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ das lineare Gleichungssystem

$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(3,2,1) + \alpha_3(1,1,1) = 0$$

also das System

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{0.1}$$
$$2\,\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{0.2}$$
$$3\,\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{0.3}$$

lösen. Subtrahiert man (0.2) von (0.3), dann ergibt sich

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{0.4}$$
$$2\,\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{0.5}$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \tag{0.6}$$

und setzt man (0.6) in eine der beiden anderen verbleibenden Gleichungen ein, dann erhält man $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{4}\alpha_3$ (und damit auch rationale Lösungen, nämlich z. B. die oben angegebene). (0.5 Punkte)

(ii) $E := \{e_x \mid x \in X\} \cup \{1\}$ in $(K^X,+,\cdot)$ über einem Körper $(K,+,\cdot)$ ist genau dann **linear abhängig**, wenn X endlich ist, sonst **linear unabhängig**.

Ist X **endlich** (und nichtleer, wie vorausgesetzt), dann gibt es eine Bijektion in $[\![1,n]\!]$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$, dann ist

$$E = \{e_{x_i} \mid i \in [\![1,n]\!]\} \cup \{1\}$$

und die Nullfunktion ergibt sich als die endliche, nichtleere Linearkombinationen der paarweise verschiedenen Indikatorfunktionen und der Einsfunktion durch

$$\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot e_{x_i} + (-1) \cdot 1 = 1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} e_{x_i} \right) + (-1) \cdot 1 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = (1 - 1) \cdot 1 = 0.$$

(0.5 Punkte)

Sei nun X **nicht endlich** und $n \in \mathbb{N}$ sowie f_ℓ, $\ell = 1, \dots, n$ paarweise verschiedene Vektoren aus E und für Koeffizienten $\alpha_\ell \in K$ eine Linearkombination der Nullfunktion durch

$$f := \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell f_\ell = 0$$

gegeben.

Gilt $f_\ell \neq 1$ für alle $\ell = 1, \dots, n$, dann gilt $f_\ell = e_{x_\ell}$ für paarweise verschiedene Elemente x_ℓ, $\ell = 1, \dots, n$ aus X. Entsprechend ist für jedes k aus $\{1, \dots, n\}$

$$0 = f(x_k) = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell f_\ell(x_k) = \alpha_k.$$

Gilt $f_k = 1$ für genau ein k aus $\{1, \dots, n\}$, dann gilt $f_\ell = e_{x_\ell}$ für paarweise verschiedene Elemente x_ℓ, $\ell = \{1, \dots, n\} \setminus k$ aus X. Da X nicht endlich ist, gibt es ein weiteres Element $x \in X \setminus \{x_\ell \,|\, \ell \in \{1, \dots n\} \setminus k\}$, und wenn wir f an dieser Stelle auswerten, dann erhalten wir

$$0 = f(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell f_\ell(x) = \alpha_k \cdot 1(x) = \alpha_k$$

und die gleiche Argumentation, wie im Fall, wo $f_\ell \neq 1$ für alle $\ell = 1, \dots, n$ galt, zeigt, dass die verbleibenden Koeffizienten ebenfalls 0 sein müssen. (0.5 Punkte)

(iii) $E := \{1, 1, 2\}$ in $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ über sich selbst können wir zuerst einmal vereinfachen, denn $E = \{1, 2\}$. Diese Menge ist **linear abhängig**, denn in der Modulo-3 Arithmetik sind 1 und 2 zueinander additiv invers, es gilt also

$$1 \cdot_3 1 +_3 1 \cdot_3 2 = 1 +_3 2 = 3 \mod 3 = 0.$$

(0.5 Punkte)

(iv) $E := \{1, t - 1, t^2 - t, \dots\}$ in $(K[t], +, \cdot)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ ist **linear unabhängig**. Die Menge kann formal beschrieben werden durch $E = \{t^k - t^{k-1} \,|\, k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$. Für $n \in \mathbb{N}$

und paarweise verschiedene $p_1, \dots, p_n$ aus E mit der Linearkombination

$$p \coloneqq \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell p_\ell = 0 \tag{0.7}$$

zeigen wir nun $\alpha_\ell = 0$ für alle $\ell \in \{1, \dots, n\}$. Die Basis des Beweises ist die Beobachtung, dass immer genau ein Polynom existiert, dass in der Linearkombination (0.7) einen Beitrag zum höchsten Exponenten liefert. Dessen Koeffizient muss Null sein, es verbleibt eine Linearkombination mit genau der gleichen Struktur, und so erhält man sukzessive Nullkoeffizienten. Wir formalisieren diese Beobachtung in einem Induktionsbeweis über $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun also $n = 1$, dann besteht die Linearkombination aus genau einem skalierten Polynom. Dieses ergibt aber nur das Nullpolynom, wenn das Polynom selbst das Nullpolynom war (hier ausgeschlossen) oder der Koeffizient 0 war.

Gilt nun $\alpha_\ell = 0$ für alle $\ell \in \{1, \dots, n\}$ für Linearkombinationen aus $n - 1 \geqslant 1$ Termen, dann hat das Polynom p aus (0.7) genau ein Polynom p_k, $k \in \{1, \dots n\}$, dass den gleichen Grad hat wie p, daher muss $\alpha_k = 0$ gelten, die Linearkombination in (0.7) hat also tatsächlich höchstens $n - 1$ nicht-Null Summanden, in denen nach Induktionsvoraussetzung ebenfalls alle Koeffizienten 0 sind. (1 Punkt)

(*v*) $E \coloneqq \{\{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ist **linear unabhängig**, denn ist $n \in \mathbb{N}$ sowie für paarweise verschiedene $\{x_1\}, \dots, \{x_n\}$ aus E die Linearkombination

$$A \coloneqq \bigtriangleup_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \{x_\ell\} = \emptyset$$

gegeben, dann enthält A genau alle Elemente, die in einer ungeraden Anzahl der Mengen $\alpha_\ell \{x_\ell\}$ enthalten sind. Diese Mengen sind aber paarweise disjunkt, daher muss $\alpha_\ell \underbrace{\{x_\ell\}}_{\neq \emptyset} = \emptyset$ für alle $\ell \in \{1, \dots, k\}$ sein, und daher $\alpha_\ell = 0 \in Z_2$ für alle $\ell \in \{1, \dots, k\}$. (0.5 Punkte)

(*vi*) $E \coloneqq \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ in $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cdot)$ über $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ benötigt Fallunterscheidungen. Wir betrachten eine beliebige Linearkombination paarweise verschiedener Mengen $X \setminus \{x_1\}, \dots, X \setminus \{x_n\}$ der Form

$$A \coloneqq \bigtriangleup_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \, X \setminus \{x_\ell\} = \emptyset$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Dabei sind die Mengen $X \setminus \{x_1\}, \dots, X \setminus \{x_n\}$ genau dann paarweise verschieden, wenn $x_1, \dots, x_n$ paarweise verschieden sind. Die Menge A beinhaltet alle Elemente, die in einer ungeraden Anzahl von Mengen $X \setminus \{x_\ell\}$ enthalten sind. Die erste Fallunterscheidung ist, ob die Zahl n gerade oder ungerade ist.

Ist n gerade (dann hat X mindestens 2 Elemente), dann ist also

$$\emptyset = A = \mathop{\triangle}_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \, X \setminus \{x_\ell\} = \bigcup_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \, \{x_\ell\}$$

und damit $\alpha_\ell = 0$ für alle $\ell \in \{1, \dots, n\}$. Ist n ungerade, dann ist

$$\emptyset = A = \mathop{\triangle}_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \, X \setminus \{x_\ell\} = \alpha_n \, X \setminus x_n \mathbin{\triangle} \mathop{\triangle}_{\ell=1}^{n-1} \alpha_\ell \, X \setminus \{x_\ell\} = \alpha_n \, X \setminus x_n \mathbin{\triangle} \bigcup_{\ell=1}^{n-1} \alpha_\ell \, \{x_\ell\}$$

also

$$\alpha_n \, X \setminus x_n = \bigcup_{\ell=1}^{n-1} \alpha_\ell \, \{x_\ell\}.$$

In diesem Fall unterscheiden wir jetzt nochmal anhand des Werts von α_n. Ist $\alpha_n = 0$, dann müssen auch alle anderen $\alpha_\ell = 0$ für $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ sein. Ist $\alpha_n = 1$, dann müssen auch alle anderen $\alpha_\ell = 1$ für $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ sein und es muss $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ sein.

Die vorliegende Menge ist also genau dann **linear abhängig**, wenn X endlich ist und $\#X$ ungerade ist. Anderenfalls ist sie **linear unabhängig**. (1 Punkt)

(b) Es sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus einem Vektorraum V mit einer nichtleeren Indexmenge I. Falls Indizes $i \neq j$ aus I existieren, so dass $v_i = v_j$ ist, so können wir zu diesen Indizes die Linearkombination

$$1 \cdot v_i + (-1) \cdot v_j = 1 \cdot v_i + (-1) \cdot v_i = (1-1) \cdot v_i = 0 \cdot v_i = 0$$

des Nullvektors angeben. Hier sind die Indizes unterschiedlich, die Koeffizienten nicht alle 0, also ist eine solche Familie immer linear abhängig. (0.5 Punkte)

(c) Die Produktmente $E \times F = \{(e, f) \mid e \in E,\ f \in F\}$ übernimmt i. A. leider wenig Struktur der einzelnen Mengen in Bezug auf lineare (Un-)abhängigkeit.

(i) Sind E und F linear unabhängig in V bzw. W, dann lässt sich i. A. nichts über die lineare (Un-)abhängigkeit der Produktmenge aussagen.

So sind z. B. $E := F := \{1\} \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ linear unabhängige Mengen, deren Kreuzprodukt $E \times F = \{(1, 1)\}$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ wieder linear unabhängig ist.

Andererseits sind die Mengen $E := F := \{(0, 1),\ (1, 0)\} \subseteq (\mathbb{R}_2, +, \cdot)$ über $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ linear unabhängig, doch das Kreuzprodukt

$$E \times F = \{((1, 0), (1, 0)),\ ((1, 0), (0, 1)),\ ((0, 1), (1, 0)),\ ((0, 1), (0, 1))\}$$

ist linear abhängig, denn es ermöglicht die Linearkombination

$$1 \cdot ((1,0),(1,0)) + (-1) \cdot ((1,0),(0,1)) + (-1) \cdot ((0,1),(1,0)) + 1 \cdot ((0,1),(0,1)) = 0.$$

Beachte: Mit den Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ kann man offensichtlich rechnen wie mit Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$.

(1 Punkt)

(ii) Ist E linear abhängig in V und F linear unabhängig in W, dann lässt sich i. A. auch nichts über die lineare Unabhängigkeit der Produktmenge aussagen.

Z. B. ist $E := \{1,2\} \subseteq (\mathbb{R},+,\cdot)$ über $(\mathbb{R},+,\cdot)$ linear abhängig und $F := \{1\} \subseteq (\mathbb{R},+,\cdot)$ über $(\mathbb{R},+,\cdot)$ linear unabhängig sowie $E \times F = \{(1,1),(2,1)\}$ linear unabhängig im Produktraum.

Andererseits sind die Mengen $E := \{1,2\} \subseteq (\mathbb{R},+,\cdot)$ über $(\mathbb{R},+,\cdot)$ und $F := \{(1,0),(0,1)\} \subseteq (\mathbb{R}_2,+,\cdot)$ über $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ebenfalls Mengen dieser Form und die Produktmenge

$$E \times F = \{(1,(1,0)),\ (1,(0,1)),\ (2,(1,0)),\ (2,(0,1))\}$$

ist linear abhängig, denn sie ermöglicht die Linearkombination

$$1 \cdot (1,(1,0)) + (-1) \cdot (1,(0,1)) + (-1) \cdot (2,(1,0)) + 1 \cdot (2,(0,1)) = 0.$$

(1 Punkt)

(iii) Wir können zeigen, dass $E \times F$ linear abhängig in $V \times W$ ist, wenn E und F linear abhängig in V bzw. W sind. Für die Übersichtlichkeit werden wir die Operationen auf V und W nicht mit ihren entsprechenden Indizes notieren.

Es seien nun $n_V, n_W \in \mathbb{N}$, Koeffizienten $\alpha_\ell \neq 0$ für alle $\ell \in \{1,\dots,n_V\}$ und $\beta_k \neq 0$ für alle $k \in \{1,\dots,n_W\}$ sowie jeweils paarweise verschiedene Vektoren $v_1,\dots,v_{n_V}$ und $w_1,\dots,w_{n_W}$ gegeben, so dass

$$\sum_{\ell=1}^{n_V} \alpha_\ell \cdot v_\ell = 0_V \in V \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n_W} \beta_k \cdot w_k = 0_W \in W.$$

Dann sind die Vektoren (v_ℓ, w_k) paarweise verschieden und $\alpha_\ell \cdot \beta_k \neq 0$ für alle Kombinationen $\ell \in \{1,\dots,n_V\}$ und $k \in \{1,\dots,n_W\}$ und es gilt

$$\sum_{\ell=1}^{n_V} \sum_{k=1}^{n_W} \alpha_\ell \beta_k \cdot (v_\ell, w_k) = \sum_{\ell=1}^{n_V} \sum_{k=1}^{n_W} (\alpha_\ell \beta_k \cdot v_\ell, \alpha_\ell \beta_k \cdot w_k) \qquad \text{(Produkt komponentenweise)}$$

$$= \left(\sum_{\ell=1}^{n_V} \sum_{k=1}^{n_W} \alpha_\ell \beta_k \cdot v_\ell, \sum_{\ell=1}^{n_V} \sum_{k=1}^{n_W} \alpha_\ell \beta_k \cdot w_k \right)$$

(Summe komponentenweise)

$$= \left(\sum_{k=1}^{n_W} \beta_k \cdot \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n_V} \alpha_\ell \cdot v_\ell}_{=0}, \sum_{\ell=1}^{n_V} \alpha_\ell \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n_W} \beta_k \cdot w_k}_{=0} \right)$$

(umsortiert/ausgeklammert)

$$= (0, 0)$$

(1 Punkt)

(d) (i) „$\Rightarrow$“: Da E linear abhängig ist, gibt es für ein $n \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_n$ aus E sowie Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\alpha_k \neq 0$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$, so dass

$$\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell v_\ell = 0.$$

Daher ist auch

$$v_k = -\frac{1}{\alpha_k} \sum_{\ell \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} \alpha_\ell v_\ell = \sum_{\ell \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} -\frac{\alpha_\ell}{\alpha_k} v_\ell.$$

Beachte: Dieser Beweis deckt den Fall von einelementigen Mengen E mit ab, denn dann muss $E = \{0\}$ sein und die Summe ist leer. (0.5 Punkte)

„$\Leftarrow$“: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und Vektoren $v_1, \dots, v_n$ aus $E \setminus \{v\}$, so dass

$$v = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell v_\ell.$$

Ist $n = 0$, dann ist die Summe leer und v muss der Nullvektor sein, damit ist E direkt linear abhängig. Ist $n \in \mathbb{N}$, dann können wir o. B. d. A. annehmen, dass die v_n paarweise verschieden sind, sonst könnten wir einfach alle Summanden zu gleichen Vektoren zusammenaddieren (also die Koeffizienten zusammenfassen). Insbesondere sind dann die v_ℓ aus $E \setminus \{v\}$ und v ebenfalls paarweise verschieden und es gilt

$$0 = v - v = v - \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell v_\ell = 1 \cdot v + \sum_{\ell=1}^{n} (-\alpha_\ell) \cdot v_\ell$$

und damit ist E linear abhängig. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe 9.2 (Basen) 1 + 3 + 1.5 + 1.5 = 7 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass $\{(1,1,0),(1,1,1),(1,-1,-1)\}$ eine Basis des $(\mathbb{R}_3,+,\cdot)$ ist.

(b) Entscheiden Sie, welche der Beispiele aus Hausaufgabe 9.1 (a) Basen der jeweiligen Vektorräume sind und beweisen Sie Ihre Antworten.

(c) Bestimmen Sie Basen folgender (Unter-)vektorräume:

(i) $\{a+b\,i \in \mathbb{C} \mid a-2\,b=0\}$ über $(\mathbb{R},+,\cdot)$ mit der Addition und (skalaren) Multiplikation in $\mathbb{C}$.

(ii) $\{f \in \mathbb{R}^{[\![1,n]\!]} \mid \sum_{i=1}^n f(i) = 0\}$ für $n \in \mathbb{N}$ über $(\mathbb{R},+,\cdot)$ mit der punktweisen Addition und (skalaren) Multiplikation.

(iii) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq 2\mathbb{N},\ A \text{ endlich}\}$ über $(\mathbb{Z}_2,+_2,\cdot_2)$ mit $\triangle$ als Addition.

(d) Geben Sie einen *konstruktiven* Beweis für die Aussage in Folgerung 13.12 im Fall endlich erzeugter Vektorräume an, also dass jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis besitzt.

Lösung.

(a) Es gibt verschiedene Wege die Aussage zu zeigen. Mit den Techniken, die wir am Ende der ersten Vorlesung gesehen haben dreht sich aber alles darum, lineare Unabhängigkeit und die Erzeugungseigenschaft der Vektoren zu zeigen.

Es ist am wenigsten Arbeit die Charakterisierung in (13.10) des Skripts zuhilfe zu nehmen und zu zeigen, dass ein beliebiger Vektor $a=(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}_3$ eindeutig linear kombiniert werden kann. Die Bedingung

$$\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(1,-1,-1) = (a_1,a_2,a_3)$$

ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = a_1 \tag{0.8}$$
$$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 = a_2 \tag{0.9}$$
$$\alpha_2-\alpha_3 = a_3 \tag{0.10}$$

Subtrahiert man (0.8) von (0.9), dann ergibt sich

$$\alpha_1+\alpha_2+\ \alpha_3 = a_1$$

$$-2\alpha_3 = a_2 - a_1$$
$$\alpha_2 - \ \alpha_3 = a_3$$

und man kann direkt ablesen, dass die eindeutige Lösung durch $\alpha_3 = -\frac{1}{2}(a_2 - a_1)$, $\alpha_2 = a_3 - \alpha_3$ und entsprechend $\alpha_1 = a_1 - \alpha_2 - \alpha_3$ gegeben ist. (1 Punkt)

(b) In Frage kommen nur linear unabhängige Mengen und somit die Menge in Punkt *(ii)* für unendliche X, Punkte *(iv)* und *(v)* sowie Punkt *(vi)* wenn X nicht endlich mit ungerader Kardinalität ist.

Im Fall von Punkt *(ii)* mit unendlichem X erzeugt die Menge E gerade alle Funktionen, die bis auf endliche viele Stellen in X konstant sind. Da X unendlich ist, enthält X eine abzählbar unendliche Teilmenge F und die Funktion, die auf $X \setminus F$ konstant 0 ist und auf F abwechselnd (im Sinne der abzählenden Bijektion in die natürlichen Zahlen) den Wert 1 und 0 annimmt liegt nicht in der linearen Hülle, es handelt sich also um **keine Basis**. (0.5 Punkte)

Im Fall von Punkt *(iv)* handelt es sich um eine **Basis**, denn wir können jedes Polynom der Form $p := \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ für festes $n \in \mathbb{N}$ mit Koeffizienten $a_i \in K$ (eindeutig) linearkombinieren. Die Idee für den Nachweis ist, dass der Polynomkoeffizient a_n den Linearkombinationskoeffizienten des Polynoms $t^n - t^{n-1}$ festlegt, alle höheren Potenzen dürfen in der Kombination nicht auftreten (weil diese endlich ist) und so ergeben sich aus a_n erst α_n und dann sukzessive die α_ℓ für $\ell < n$. Wir formalisieren diese Aussage in einem Induktionsbeweis über die Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Ist $n = 1$, dann ist das Polynom konstant und somit eindeutig $p = a_0 = a_0 \cdot 1t^0$. Können wir jedes Polynom p der obigen Form für Terme der Potenzen bis höchstens $n - 1 \in \mathbb{N}$ eindeutig aus den Polynomen aus E mit Potenzen kleiner gleich $n - 1$ linearkombinieren und ist $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, dann ist $p - a_n(t^n - t^{n-1})$ ein solches Polynom und wir müssen nur noch $a_n(t^n - t^{n-1})$ wieder addieren. (1 Punkt)

Im Fall von Punkt *(v)* besteht die lineare Hülle gerade aus allen endlichen Teilmengen von X, also ist die vorliegende linear unabhängige Menge genau dann eine Basis, wenn X endlich ist. (0.5 Punkte)

Im Fall von Punkt *(vi)* müssen wir nur den Fall untersuchen, in dem X nicht endlich mit ungerader Kardinalität ist. Kern der Untersuchung ist jetzt, dass für gerades n

$$\mathop{\triangle}_{\ell=1}^{n} X \setminus \{x_\ell\} = \{x_\ell \mid x_\ell \text{ kam ungerade oft vor}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$$

und für ungerades n

$$\mathop{\triangle}_{\ell=1}^{n} X \setminus \{x_\ell\} = X \setminus \{x_\ell \mid x_\ell \text{ kam ungerade oft vor}\} \supseteq X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$$

gilt. Wir können also durch Linearkombinationen nur endliche Mengen gerader Kardinalität und Mengen mit endlichen Komplementen ungerader Kardinalität generieren. Ist X unendlich, dann enthält X eine abzählbar unendliche Teilmenge F und die Menge, die jedes zweite Element aus F (im Sinne der abzählenden Bijektion nach $\mathbb{N}$) enthält ist unendlich und hat unendliches Komplement, liegt also nicht in der linearen Hülle, dann handelt es sich also um **keine Basis**. Ist X hingegen endlich, dann hat es nach Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit von E gerade Kardinalität. Jede endliche Teilmenge $F \subseteq X$ mit gerader Kardinalität können wir dann gerade durch $F = \bigtriangleup_{x \in F} X \setminus \{x\}$ erzeugen. Für jede endliche Teilmenge $F \subseteq X$ mit ungerader Kardinalität hat auch $X \setminus F$ ungerade Kardinalität und $F = \bigtriangleup_{x \in X \setminus F} X \setminus \{x\}$, hier handelt es sich also um eine **Basis**. (1 Punkt)

(c) In der Aufgabenstellung steht bereits in direkt, dass es sich bei den angegebenen Mengen um Vektorräume handelt, das muss hier also nicht nachgeprüft werden. Der Vollständigkeit halber werden hier aber kurze Erklärungen angegeben, warum das so ist.

(i) Die Menge ist mit den Verknüpfungen ein Untervektorraum, da $0 \in \mathbb{C}$ in der Menge liegt und abgeschlossen bezüglich der Addition und Multiplikation *mit reellen Zahlen*. Hier ist es wichtig, dass die Menge über $\mathbb{R}$ betrachtet wird, nicht über $\mathbb{C}$, denn da ist sie bezüglich der Multiplikation nicht abgeschlossen.

Eine mögliche Basis ist $\{2 + i\}$. Diese Menge ist offensichtlich linear unabhängig, da sie aus einem einzelnen nicht-Null Vektor besteht. Weiterhin kann jede Zahl der Form $a + bi$ aus der Menge mit dem Skalar b linearkombiniert werden, denn

$$b \cdot (2 + i) = \underbrace{2b}_{=a} + bi = a + bi.$$

(0.5 Punkte)

Beachte: Jedes nicht-Null Element aus der Menge ergibt eine Basis, man muss dann nur mit anderen Skalaren arbeiten.

(ii) Wieder ist die Menge mit den Verknüpfungen ein Unterraum, denn die Nullfunktion erfüllt die Bedingung offensichtlich und die Funktionenaddition und die skalare Multiplikation arbeiten punktweise, wir können also aus der additiven Kommutativität und den Distributivgesetzen in $\mathbb{R}$ sofort zeigen, dass die Menge unter diesen Operationen abgeschlossen ist.

Eine mögliche Basis überlegt man sich z.B. indem man die linear unabhängige Menge der Indikatorfunktionen aus Hausaufgabe 9.1 hernimmt und geeignet einschränkt. Wir können die Bedingung umschreiben zu $f(n) = -\sum_{i=1}^{n} f(i)$, wir erhalten also eine einschränkende Bedingung an den Wert der Funktionen in n während die anderen frei bleiben. Eine Basis wäre also die Menge $\{e_i - e_n \mid i = 1, \dots, n-1\}$, denn für ein beliebiges f aus der Menge ist die eindeutige Darstellung von f bezüglich dieser Funktionen durch

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (e_i - e_n) \quad \text{mit} \quad \alpha_i = f(i)$$

gegeben. **Beachte:** Im Fall $n = 1$, wo der Raum der Nullvektorraum im Raum der Funktionen von $\{1\}$ nach $\mathbb{R}$ ist, ist die Basis leer. Der Fall ist mit abgedeckt

(iii) Wieder ist die Menge mit den Verknüpfungen ein Unterraum, denn die leere Menge liegt darin und bei der Bildung der symmetrischen Differenz ist die Menge wegen der Identität $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$ auch abgeschlossen unter der Addition und der skalaren Multiplikation.

Eine mögliche Basis ist dann die Menge $\{\{x\} \mid x \in 2\mathbb{N}\}$. Wie in Hausaufgabe 9.1 gezeigt, ist diese Menge linear unabhängig als Teilmenge einer linear unabhängigen Menge und für A aus der gegebenen Menge ist die eindeutige Linearkombination, die A ergibt, gegeben durch

$$A = \bigtriangleup_{x \in A} 1 \cdot \{x\}.$$

(1 Punkt)

(d) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum, der von einer endlichen Menge $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ mit $\#E = n \in \mathbb{N}_0$ erzeugt wird. Wir können uns konstruktiv von zwei Richtungen nähern. Entweder wir erweitern die leeren Menge, eine linear unabhängige Menge, um Elemente aus E, bis wir V erzeugen, oder wir starten mit dem Erzeugendensystem E und entfernen redundante Vektoren, bis wir linear unabhängig sind. Der zweite Ansatz ist einfacher zu realisieren, denn bei dem ersten Ansatz müssen wir nach jedem Schritt evaluieren, welche Elemente aus E wir nun schon alle generieren und ein davon verschiedenes hinzunehmen, was zusätzliche Notation verursacht.

Wir folgen hier also dem zweiten Ansatz und generieren eine Familie $F_k \subseteq E$ von V-erzeugenden Teilmengen von E für $k \in [\![0, k_0]\!]$ mit $k_0 \in \mathbb{N}_0$, $k_0 \leq \#E$, wobei die letzte Menge F_{k_0} zusätzlich linear unabhängig und damit eine Basis ist.

Wir beginnen mit $F_0 = E$, welche offensichtlich die geforderten Eigenschaften besitzt. Ist nun ein $k \in \mathbb{N}_0$ und ein F_k der obigen Struktur gegeben, welches noch nicht linear unabhängig ist, dann gibt es auf Grund von Lemma 13.3 einen Vektor $v \in F_k$, so dass $v \in \langle F_k \setminus \{v\} \rangle$ und daher $V = \langle F_k \rangle = \langle F_k \setminus \{v\} \rangle$. Wir setzen dann $F_{k+1} := F_k \setminus \{v\}$ und haben eine weiterhin V-erzeugende Teilmenge von E.

Dieser Prozess terminiert nach höchstens $\#E$ Schritten, denn es ist $\#F_k = \#E - k$. (1.5 Punkte)

Dieser Prozess ist konstruktiv, er setzt aber voraus, dass wir im Falle von linearer Abhängigkeit einen Vektor v bestimmen können, der als Linearkombination der verbleibenden darstellbar ist, das ist aber entsprechend dem Beweis von Lemma 13.3 äquivalent dazu, dass wir wissen „wo“ lineare Abhängigkeit vorliegt.

Hausaufgabe 9.3 (Dimension) 1.5 + 1.5 = 3 Punkte

(a) Wie in Hausaufgabe 8.3 sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge, $x_0 \in X$ beliebig und $(K^X, +, \cdot)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den punktweisen Verknüpfungen sowie

$$\begin{aligned} U &:= \left\{ f \in K^X \,\middle|\, f(x_0) = 0 \right\}, \\ W &:= \left\{ f \in K^X \,\middle|\, f(x) = f(y)\ \forall x, y \in X \right\}. \end{aligned} \tag{0.11}$$

(i) Zeigen Sie, dass $\dim_K(K^X) = \#X$, falls X endlich ist, und andernfalls $\dim_K(K^X) = \infty$.

(ii) Bestimmen Sie $\dim_K(U)$, $\dim_K(W)$ und $\dim_K(U \cap W)$.

(b) Es sei $(K, +_K, \cdot_K)$ ein *endlicher* Körper und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V genau dann K-endlichdimensional ist, wenn V endlich ist, und dass dann $\#V = \#K^{\dim_K(V)}$ gilt.

Lösung.

(a) (i) Wir wissen aus Hausaufgabe 9.1 bereits, dass die Menge der Indikatorfunktionen

$$E := \{e_x \,|\, x \in X\} \tag{0.12}$$

linear unabhängig ist (denn sie ist Teilmenge der linear unabhängigen Menge in Punkt (ii)). Die Menge E ist offensichtlich zu X gleichmächtig, wie die Bijektion $x \mapsto e_x$ zeigt.

Ist X endlich, dann ist E auch erzeugend, denn $f : X \to K$ kann (eindeutig) als

$$f = \sum_{x \in X} f(x) \cdot e_x$$

linearkombiniert werden, da die Summe endlich ist. Für die Menge E gilt dann $\#E = \#X$ und damit $\dim_K(K^X) = \#X$. (0.5 Punkte)

Ist X nicht endlich, dann ist E nicht endlich, aber weiterhin linear unabhängig. Insbesondere ist jede endliche Teilmenge von E linear unabhängig, aber nach dem Austauschsatz von Steinitz ist die Kardinalität jeder linear unabhängigen Teilmenge von K^X durch die Dimension des Raums beschränkt, diese kann also nicht endlich sein. (0.5 Punkte)

(ii) Wir haben in Hausaufgabe 8.3 bereits gezeigt, dass $U \cap W = \emptyset$ ist und damit $\dim U \cap W = 0$. Außerdem ist die Menge der konstanten Einsfunktion eine Basis von W und damit immer $\dim_K W = 1$.

Ist X endlich, dann ist E aus (0.12) endlich und $E \setminus e_{x_0}$ eine Basis. Die eindeutige Darstellung eines $f \in U$ ist dann

$$f = \sum_{x \in X \setminus \{x_0\}} f(x) \cdot e_x.$$

Entsprechend ist $\dim_K U = \#X - 1$. Ist X unendlich, dann ist $E \setminus e_{x_0}$ weiterhin linear unabhängig und mit analoger Argumentation wie in der letzten Teilaufgabe folgt $\dim_K U = \infty$. (0.5 Punkte)

(b) „$\Leftarrow$:" Ist V endlich, dann ist V endlich erzeugt, denn V selbst ist ein Erzeugendensystem, entsprechend ist die Dimension von V bezüglich jedes Körper, über dem V ein Vektorraum ist, endlich. (0.5 Punkte)

„$\Rightarrow$:" Es sei V endlichdimensional und $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis mit $n := \dim_K V$ paarweise verschiedenen Elementen. Weil B eine Basis ist, gibt es für jedes $v \in V$ ein eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \cdot v_\ell \tag{0.13}$$

mit Koeffizienten $\alpha_\ell \in K$. Das bedeutet insbesondere, das bei den Kombinationsmöglichkeiten von Koeffizienten in der Summe in (0.13) keine verschiedenen Möglichkeiten den gleichen Vektor ergeben, also sind die möglichen Vektoren aus v gerade über die Kombinationen der $\dim_K V$ Koeffizienten aus K gegeben und damit $\#V = \#K^{\dim_K(V)}$. (1 Punkt)

Hausaufgabe 9.4 (Summen von Unterräumen) 0.5 + 1 + 1.5 + 2 = 5 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass U und W in (0.11) aus Hausaufgabe 9.3 komplementär in $(K^X, +, \cdot)$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Kodimension in Definition 14.10 wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl des komplementären Unterraums.

(c) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V. Zeigen Sie Satz 14.15 des Skripts, also die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

(ii) Für alle $v \in V$ existiert eine endliche Teilfamilie $I_0 \subseteq I$ und Vektoren $u_i \in U_i$, sodass $v = \sum_{i \in I_0} u_i$ gilt, und diese Darstellung ist (bis auf Summanden von Nullvektoren) eindeutig.

(d) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Zeigen Sie Satz 14.16 des Skripts, also die folgenden Aussagen:

(i) Ist B eine Basis von V und $(B_i)_{i\in I}$ eine Partition von B mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt $V = \bigoplus_{i\in I}\langle B_i\rangle$.

(ii) Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V mit Basen B_i, $i \in I$, und gilt $V = \bigoplus_{i\in I} U_i$, so ist $\bigcup_{i\in I} B_i$ eine Basis von V.

Lösung.

(a) Wir wissen bereits aus Hausaufgabe 8.3, dass $U \cap W = \emptyset$ ist, es bleibt also nur zu zeigen, dass $U + W = V$, was man daran sieht, dass $f \in K^X$ in die Form

$$f = \underbrace{f - f(x_0)}_{\in U} + \underbrace{f(x_0)}_{\in W}$$

zerlegt werden kann. Dabei ist mit $f(x_0)$ jeweils die konstante Funktion mit dem Wert $f(x_0) \in K$ gemeint. (0.5 Punkte)

(b) Es seien $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum mit Unterraum U und zwei komplementäre Unterräumen E und F, sowie eine Basis B_F von F. Angenommen, es wäre $\dim(E) \neq \dim(F)$, dann muss einer der beiden Unterräume endlichdimensional sein, und eine kleinere Dimension haben als der andere. Wir nehmen o. B. d. A. an, dass das E ist mit Dimension $\mathbb{N} \ni n := \dim(E) < \dim(F)$. Dann beinhaltet B_F eine Menge an $n + 1$ paarweise verschiedenen Elementen $f_1, \dots, f_{n+1}$, die als Teilmenge der linear unabhängigen Menge B_F wieder linear unabhängig sein müssen. Da $F \subseteq V = U \oplus E$ existieren eindeutige Elemente $e_i \in E$ und $u_i \in U$, so dass

$$f_i = u_i + e_i, i = 1, \dots, n + 1.$$

Da die Menge $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ aus $n + 1$ Vektoren im n-dimensionalen Raum E besteht, muss sie linear abhängig sein, also existiert eine nichttriviale Linearkombination der Null zu Koeffizienten $\alpha_i,\ i = 1, \dots, n + 1$, für die wiederum

$$F \ni \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i u_i + \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i u_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i}_{=0} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i u_i \in U$$

gilt, also dass die entsprechende Linearkombination der f_i sowohl in F, also auch in U liegt, und damit 0 sein muss. Entsprechend sind die f_i doch linear abhängig, was ein Widerspruch ist. (1 Punkt)

(c) „⇒“ Per Definition ist

$$V = \Big\langle \bigcup_{i \in I} U_i \Big\rangle \quad \text{und} \quad U_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i = \{0\} \quad \text{für alle } j \in I.$$

Die Darstellung der linearen Hülle als die Menge aller endlichen Linearkombinationen aus Satz 12.13 liefert also für ein beliebiges $v \in V$ gerade eine Darstellung

$$v = \sum_{i \in I_0} u_i$$

mit endlicher Teilfamilie I_0 von I. Liegt eine zweite dieser Darstellungen vor, also $v = \sum_{i \in \tilde{I}_0} \tilde{u}_i$, dann ist

$$0 = v - v = \sum_{i \in I_0 \cup \tilde{I}_0} u_i - \tilde{u}_i$$

mit $u_i := 0$ für $i \in I_0 \setminus \tilde{I}_0$ und $\tilde{u}_i := 0$ für $i \in \tilde{I}_0 \setminus I_0$. Entsprechend ist für jedes $j \in I_0 \cup \tilde{I}_0$

$$U_j \ni u_j - \tilde{u}_j = \sum_{i \in I_0 \cup \tilde{I}_0,\, i \neq j} u_i - \tilde{u}_i \in \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i$$

also $u_j = \tilde{u}_j$, denn der Schnitt ist trivial. (1 Punkt)

„⇐:“ Die Voraussetzung impliziert sofort, dass $V = \Big\langle \bigcup_{i \in I} U_i \Big\rangle$, es bleibt die Schnitteigenschaft zu zeigen. Dabei ist für $v \in U_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i$ mit den zwei Zerlegungen

$$v = \underbrace{v}_{\in U_i} + 0 \quad \text{und} \quad v = 0 + \underbrace{v}_{\in \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i}$$

und der Eindeutigkeit der Darstellungen klar, dass $v = 0$ sein muss. (0.5 Punkte)

(d) Der Beweis geht ziemlich analog zu dem von Satz 14.8 des Skripts.

(i) Es ist

$$V = \langle B \rangle = \Big\langle \bigcup_{i \in I} B_i \Big\rangle = \Big\langle \bigcup_{i \in I} \langle B_i \rangle \Big\rangle = \sum_{i \in I} \langle B_i \rangle$$

und damit $\sum_{i \in I} \langle B_i \rangle = V$, wobei die entscheidende Gleichung gilt, da die Linearkombinationen aus Linearkombinationen der Elemente in den B_i immer wieder zu Linearkombinationen der Elemente in den B_i zusammenfallen. (0.5 Punkte)

Sei nun $j \in I$ und $v \in \langle B_j \rangle \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \langle B_i \rangle$. Dann hat v je eine Darstellung bezüglich der Basisteilmenge B_j und eine Darstellung als Linearkombination der Elemente aus $\bigcup_{i \in I \setminus \{j\}} B_i$. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren aus B, die in den Kombinationen auftreten, folgt sofort, dass $v = 0$ sein muss und damit $\langle B_j \rangle \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \langle B_i \rangle = 0$ für alle j. (0.5 Punkte)

(ii) Die Erzeugungseigenschaft folgt wieder aus der Gleichungskette

$$\Big\langle \bigcup_{i\in I} B_i \Big\rangle = \Big\langle \bigcup_{i\in I} \langle B_i\rangle \Big\rangle = \Big\langle \bigcup_{i\in I} U_i \Big\rangle = \sum_{i\in I} U_i = V.$$

(0.5 Punkte)

Sind nun I_0 eine endliche Teilfamilie von I und für jedes der $i \in I_0$ die Indexmengen J_i ebenfalls endlich und

$$0 = \sum_{i\in I_0} \underbrace{\sum_{j\in J_i} \alpha_{i,j} v_{i,j}}_{=:v_i} = \sum_{i\in I_0} v_i.$$

Dann ist $v_k \in U_k \cap \sum_{i\in I\setminus\{k\}} U_i = \{0\}$ für alle $k \in I$ auf Grund der Schnitteigenschaft der direkten Summe, und wegen der linearen Unabhängigkeit der B_k folgt sofort $\alpha_{k,j} = 0$ für alle $j \in J_k$ für alle $k \in I$, also ist $\bigcup_{i\in I} B_i$ linear unabhängig. (0.5 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.