R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 8

Ausgabedatum: 4. Dezember 2023
Abgabedatum: 10. Dezember 2023

Hausaufgabe 8.1 (Vektorräume) 7 Punkte

(i) Es sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der übliche Körper der reellen Zahlen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind und beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$, wobei $\oplus$ die übliche Addition in $\mathbb{C}$ ist und $\alpha \odot x := \alpha \cdot \overline{x}$

(b) $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y := x + y - i$ und $\alpha \odot x := \alpha \cdot (x - i) + i$

(c) $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle, \odot)$ mit $\alpha \odot A := \{\alpha \cdot x \mid x \in A\}$.

(d) $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y := x \cdot y$ und $\alpha \odot x := x^\alpha$

(ii) Es sei X eine nichtleere Menge und $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ die bereits bekannte abelsche Gruppe. Geben Sie eine skalare Multiplikation an, so dass $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ mit dieser skalaren Multiplikation ein Vektorraum über dem Körper $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ergibt.

(iii) Es seien $(V, +_V, \cdot_V)$ und $(W, +_W, \cdot_W)$ Vektorräume über einem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$. Zeigen Sie, dass $V \times W$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +\colon (V \times W)^2 &\to (V \times W) & (v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) &:= (v +_V \tilde{v}, w +_W \tilde{w}) \\ \cdot\colon K \times (V \times W) &\to (V \times W) & \alpha \cdot (v, w) &:= (\alpha \cdot_V v, \alpha \cdot_W w) \end{aligned}$$

ein Vektorraum über K ist.

Hausaufgabe 8.2 (Linearkombinationen) 2 Punkte

Es sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der übliche Körper der reellen Zahlen.

(i) Gegeben sei der Vektorraum der Polynome $(\mathbb{R}[t], +, \odot)$ über $\mathbb{R}$ aus Beispiel 12.3. Berechnen Sie die Linearkombination der Vektoren $p_1 = t^2 + 1$, $p_2 = -2\,t^2 + t + 1$ und $p_3 = -3\,t^2 + 2\,t + 3$ zu den Koeffizienten $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = -1$. Zeigen Sie weiterhin, dass p_3 eine Linearkombination von p_1 und p_2 ist.

(ii) Gegeben sei der Vektorraum $(\mathbb{R}_n, \oplus, \odot)$ über $\mathbb{R}$ aus Beispiel 12.3. Bestimmen Sie, für welche $r \in \mathbb{R}$ der Vektor $v := (-7, r, 2)$ eine Linearkombination der Vektoren $v_1 := (1, 2, 4)$, $v_2 := (-2, 1, 2)$ und $v_3 := (3, 1, 2)$ ist, und bestimmen Sie dann alle möglichen Koeffizienten aus Linearkombinationen von v_1, v_2, v_3, die v ergeben.

Hausaufgabe 8.3 (Unterräume) 5 Punkte

(i) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums $(K[t], +, \cdot)$ der Polynome mit den entsprechenden Verknüpfungen einen Untervektorraum bilden.

(a) $\{p \in K[t] \mid \deg(p) > 5\}$
(b) $\{p \in K[t] \mid \deg(p) \leqslant 17\}$
(c) $\{p \in K[t] \mid \deg(p) \text{ gerade}\} \cup \{0\}$
(d) $\{\sum_{i=0}^{n} a_i t^{2i} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

(ii) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $(U_i, +, \cdot)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen. Zeigen Sie Lemma 12.11 des Skripts, also dass dann auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ mit $+$ und $\cdot$ ein Unterraum von $(V, +, \cdot)$ ist.

(iii) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $(U_1, +, \cdot)$ sowie $(U_2, +, \cdot)$ Unterräume. Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ ist.

(iv) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge, $x_0 \in X$ beliebig und $(K^X, +, \cdot)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den punktweisen Verknüpfungen sowie

$$
\begin{aligned}
U &:= \left\{ f \in K^X \,\middle|\, f(x_0) = 0 \right\}, \\
W &:= \left\{ f \in K^X \,\middle|\, f(x) = f(y)\ \forall x, y \in X \right\}.
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie:

(a) U und W sind Unterräume von $(K^X, +, \cdot)$
(b) $(U \cap W) = \{0\}$

(v) Zeigen Sie, dass $U \overset{\text{UR}}{\leqslant} V :\Leftrightarrow (U \text{ ist Unterraum von } V)$ eine Ordnungsrelation auf der Klasse aller Vektorräume definiert.

Hausaufgabe 8.4 (Erzeugung in Vektorräumen) 3 Punkte

(i) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(K[t], +, \cdot)$ der Vektorraum der Polynome über K. Zeigen Sie, dass

$$\left\{\alpha_1 t^2 + \alpha_2(t^6 - t^3) - \alpha_3 \sum_{k=3}^{17} 2t^k \,\middle|\, \alpha_i \in K \,\forall i \in \{1, 2, 3\}\right\}$$

ein Unterraum von $(K[t], +, \cdot)$ ist.

(ii) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K und $E \subseteq V$. Zeigen Sie:

(a) $\langle E \rangle = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \;\forall i = 1, \ldots, n \;(v_i \in \langle E \rangle,\; \alpha_i \in K)\right\}$.

(b) $\langle E \rangle = \bigcup\{\langle E_0 \rangle \mid E_0 \subseteq E, E_0 \text{ endlich}\}$.

(iii) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Dann sind $(\mathcal{P}(V), \subseteq)$ und $(\{U \in \mathcal{P}(V) \mid U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V\}, \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq})$ partiell geordnete Mengen. Zeigen Sie, dass die Hüllenbildung $\langle \cdot \rangle \colon \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ ein **Ordnungshomomorphismus** ist, also dass für $E, F \in \mathcal{P}(V)$ gilt:

$$E \subseteq F \;\Rightarrow\; \langle E \rangle \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} \langle F \rangle$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.