Übung 8 - Lösung

Ausgabedatum: 4. Dezember 2023
Abgabedatum: 10. Dezember 2023

Hausaufgabe 8.1 (Vektorräume) 7 Punkte

(i) Es sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der übliche Körper der reellen Zahlen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind und beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$, wobei $\oplus$ die übliche Addition in $\mathbb{C}$ ist und $\alpha \odot x := \alpha \cdot \overline{x}$

(b) $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y := x + y - i$ und $\alpha \odot x := \alpha \cdot (x - i) + i$

(c) $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle, \odot)$ mit $\alpha \odot A := \{\alpha \cdot x \mid x \in A\}$.

(d) $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \odot)$ mit $x \oplus y := x \cdot y$ und $\alpha \odot x := x^\alpha$

(ii) Es sei X eine nichtleere Menge und $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ die bereits bekannte abelsche Gruppe. Geben Sie eine skalare Multiplikation an, so dass $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ mit dieser skalaren Multiplikation ein Vektorraum über dem Körper $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ergibt.

(iii) Es seien $(V, +_V, \cdot_V)$ und $(W, +_W, \cdot_W)$ Vektorräume über einem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$. Zeigen Sie, dass $V \times W$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} &+\colon (V \times W)^2 \to (V \times W) && (v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) := (v +_V \tilde{v}, w +_W \tilde{w}) \\ &\cdot\colon K \times (V \times W) \to (V \times W) && \alpha \cdot (v, w) := (\alpha \cdot_V v, \alpha \cdot_W w) \end{aligned}$$

ein Vektorraum über K ist.

Lösung.

(i) (a) Bekanntermaßen ist $(\mathbb{C}, +)$ eine **abelsche Gruppe** (Beispiele 7.16 und 7.20), die **äußere Verknüpfung** bildet wieder nach $\mathbb{C}$ ab, da $\mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Außerdem ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{C}$ wegen der Rechenregeln in den komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned}\alpha \odot (u \oplus v) &= \alpha \cdot \overline{u+v} &&= \alpha \cdot \overline{u} + \alpha \cdot \overline{v} = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)\\ (\alpha+\beta) \odot v &= (\alpha+\beta) \cdot \overline{v} &&= \alpha \cdot \overline{v} + \beta \cdot \overline{v} = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v),\end{aligned}$$

es gelten also die gemischten **Distributiv**gesetze. Nun ist aber i. A.

$$(\alpha \cdot \beta) \odot v = (\alpha \cdot \beta) \cdot \overline{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{v}) \neq \alpha \cdot \overline{(\beta \cdot \overline{v})} = \alpha \odot (\beta \odot v),$$

wie man z. B. für $v = i$, $\alpha = \beta = 1$ sieht, denn hier ist

$$(\alpha \cdot \beta) \odot v = 1 \odot i = 1 \cdot (-i) = -i \neq i = 1 \cdot i = 1 \odot (-i) = 1 \odot (1 \odot i) = \alpha \odot (\beta \odot v)$$

damit gilt das gemischte **Assoziativgesetz nicht**.

Zudem ist die **Eins im Körper** $\mathbb{C}$ **nicht neutral** bzgl. $\odot$, denn z. B. $1 \odot i = -i \neq i$.

Hier handelt es sich also **nicht um einen Vektorraum**. (1 Punkt)

(b) Die Abbildung $\oplus$ ist eine **Verknüpfung**, denn sie bildet wieder in die komplexen Zahlen ab. Assoziativ ist diese Verknüpfung ebenfalls, denn es ist für $u, v, w \in \mathbb{C}$:

$$(u \oplus v) \oplus w = (u+v-i) \oplus w = (u+v-i)+w-i = u+v+w-2 \cdot i = u+(v+w-i)-i = u \oplus (v+w-i) = u \oplus (v \oplus w)$$

entsprechend liegt mit $(\mathbb{C}, \oplus)$ eine **Halbgruppe** vor. Das neutrale Element bzgl. der Addition $\oplus$ ist das Element i, denn es ist

$$u \oplus i = u + i - i = u.$$

Es liegt mit $(\mathbb{C}, \oplus)$ also schonmal ein **Monoid** vor. Das zu x in $\mathbb{C}$ bzgl. $\oplus$ inverse Element ist $-x + 2i$, denn dann ist

$$x \oplus -x + 2i = x - x + 2i - i = i,$$

Mit $(\mathbb{C}, \oplus)$ liegt also eine **abelsche Gruppe** vor, in der die Kommutativität direkt aus der Kommutativität der üblichen Addition in $\mathbb{C}$ geerbt wird. (0.5 Punkte)

Weiterhin ist die multiplikative Abbildung $\odot$ ebenfalls eine äußere Vernüpfung, denn sie bildet wieder nach $\mathbb{C}$ ab. Zusätzlich gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\alpha \odot (u \oplus v) &= \alpha \odot (u + v - i)\\ &= \alpha \cdot (u + v - 2i) + i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\alpha \cdot (v - i) + i) + (\alpha \cdot (u - i) + i) - i \\ &= (\alpha \odot v) \oplus (\alpha \odot u) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \odot v &= (\alpha + \beta) \cdot (v - i) + i \\ &= (\alpha(v - i) + i) + (\beta(v - i) + i) - i \\ &= (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v), \end{aligned}$$

also gelten die gemischten **Distributivgesetze**. Weiter ist

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta) \odot v &= (\alpha \cdot \beta) \cdot (v - i) + i \\ &= \alpha \cdot ((\beta \cdot (v - i) + i) - i) + i \\ &= \alpha \odot (\beta \odot v), \end{aligned}$$

und damit das **Assoziativgesetz**. Auch ist die Körper-Eins 1 neutral bzgl. der skalaren Multiplikation, denn

$$1 \odot v = v - i + i = v.$$

Hier handelt es sich also um einen Vektorraum. (1 Punkt)

(c) Hier ist $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \triangle)$ eine inzwischen hinlänglich bekannte **abelsche Gruppe** mit dem neutralen Element $\emptyset$.

Außerdem ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \alpha \odot (A \triangle B) &= \alpha \odot (A \setminus B \cup B \setminus A) \\ &= (\alpha \odot (A \setminus B)) \cup (\alpha \odot (B \setminus A)) \\ &= ((\alpha \odot A) \setminus (\alpha \odot B)) \cup ((\alpha \odot B) \setminus (\alpha \odot A)) \\ &= (\alpha \odot A) \triangle (\alpha \odot B) \end{aligned}$$

es gilt also das **erste Distributivgesetz**, allerdings ist i. A.

$$(\alpha + \beta) \odot B = \{(\alpha + \beta) \cdot b \mid b \in B\} \neq (\alpha \odot B) \triangle (\beta \odot B),$$

wie man z. B. für $B = \mathbb{R}$, $\alpha = \beta = 1$ sieht, denn hier ist

$$(\alpha + \beta) \odot B = 2\mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \emptyset = \mathbb{R} \triangle \mathbb{R} = (\alpha \odot B) \triangle (\beta \odot B),$$

das **zweite Distributivgesetz gilt also nicht**, entsprechend handelt es sich um **keinen Vektorraum**. Das gemischte **Assoziativgesetz gilt** allerdings, denn hier ist

$$(\alpha \cdot \beta) \odot B = \{(\alpha \cdot \beta) \cdot b \mid b \in B\} = \alpha \odot \{\beta \cdot b \mid b \in B\} = \alpha \odot (\beta \odot B)$$

und auch die **Körper-Eins** 1 **ist neutral** in der skalaren Multiplikation, denn hier ist

$$1 \odot B = \{1 \cdot b \mid b \in B\} = \{b \mid b \in B\} = B.$$

(1 Punkt)

(d) $(R_{>0}, \cdot)$ ist eine **abelsche Gruppe**, denn die Multiplikation bildet positive Zahlen auf positive Zahlen ab und ist assoziativ sowie kommutativ. Das neutrale Element ist die (positive, reelle) Zahl 1, alle positiven Zahlen sind multiplikativ invertierbar und die Inversen sind ebenfalls positiv und reell. (0.5 Punkte)

Die Potenzen x^α, $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sind alle positiv, entsprechend ist die skalare Multiplikation tatsächlich eine **äußere Verknüpfung**. Außerdem ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{R}_{>0}$ (hier wird Schulwissen für das Rechnen mit Potenzen vorausgesetzt):

$$\begin{aligned}
\alpha \odot (u \oplus v) &= (u \cdot v)^\alpha &&= u^\alpha \cdot v^\alpha &&= (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v) \\
(\alpha + \beta) \odot v &= v^{\alpha+\beta} &&= v^\alpha \cdot v^\beta &&= (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v) \\
(\alpha \cdot \beta) \odot v &= v^{\alpha \cdot \beta} &&= \left(v^\beta\right)^\alpha &&= \alpha \odot (\beta \odot v),
\end{aligned}$$

es gelten also die gemischten **Distributiv**gesetze und das gemischte **Assoziativ**gesetz. Die **Eins im Körper ist auch neutral** bzgl. $\odot$, denn $x^1 = x \; \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$. (0.5 Punkte)

Hier handelt es sich also um einen Vektorraum.

Beachte: Die Vektorraum-Null und die Körper-Eins stimmen hier also zufällig überein.

(ii) Die einzige Möglichkeit, eine skalare Multiplikation zu definieren, ist durch die Forderung der Neutralität der Körper-Eins und den Rechenregeln aus Lemma 12.4 festgelegt. Es muss nämlich für die beiden Elemente $0, 1 \in \mathbb{Z}_2$ und beliebiges $v \in V := \mathcal{P}(X)$ gelten:

$$0 \odot v = \emptyset \qquad \text{(Rechenregel)}$$
$$1 \odot v = v. \qquad \text{(Neutralität der 1)}$$

(0.5 Punkte)

Hier erhalten wir tatsächlich einen Vektorraum, für $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ ist nämlich

$$\begin{aligned}
\alpha \odot (u \triangle v) &= u \triangle v = (\alpha \odot u) \triangle (\alpha \odot v) && \text{falls } \alpha = 1 \\
\alpha \odot (u \triangle v) &= \emptyset = \emptyset \triangle \emptyset = (\alpha \odot u) \triangle (\alpha \odot v) && \text{falls } \alpha = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta) \odot v &= 0 \odot v = \emptyset = (\alpha \odot v) \triangle (\beta \odot v) && \text{falls } \alpha = \beta \\
(\alpha + \beta) \odot v &= 1 \odot v = \emptyset \triangle 1 \odot v = (\alpha \odot v) \triangle (\beta \odot v) && \text{falls } \alpha \neq \beta,
\end{aligned}$$

es gelten also die **Distributivgesetze**. Dabei ist der rot markierte Teil entscheidend, denn sowohl in $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ als auch in $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ sind alle Elemente selbstinvers, was den Fall $\alpha = \beta = 1$ abdeckt. Diese Konstruktion also auf immer dann anwendbar, wenn eine Gruppe vorliegt, in der jedes Element selbstinvers ist (eine sogenannte boolesche Gruppe).

Zuletzt gilt das **Assoziativgesetz**, denn

$$\begin{aligned}
&(\alpha \cdot \beta) \odot v = 1 \odot v = 1 \odot (1 \odot v) = \alpha \odot (\beta \odot v) && \text{falls } \alpha = \beta = 1 \\
&(\alpha \cdot \beta) \odot v = 0 \odot v = \emptyset = \alpha \odot (\beta \odot v) && \text{sonst.}
\end{aligned}$$

(1 Punkt)

(iii) Die benötigten Eigenschaften folgen sofort aus der komponentenweisen Definition der Verknüpfungen auf dem Produktraum. Diese ist natürlich wieder assoziativ und kommutatitv, das neutrale Element bzgl. der Addition ist $(0_V, 0_W)$ und das zu (v, w) inverse Element ist $-(v, w) = (-v, -w)$. Weiter ist für $\alpha, \beta \in K$, $(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v, w) \in V \times W$

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot ((v_1, w_1) + (v_2, w_2)) &= \big(\alpha \cdot_V (v_1 +_V v_2), \alpha \cdot_W (w_1 +_W w_2)\big) \\
&= \big(\alpha \cdot_V v_1 +_V \alpha \cdot_V v_2, \alpha \cdot_W w_1 +_W \alpha \cdot_W w_2\big) \\
&= \alpha \cdot (v_1, w_1) + \alpha \cdot (v_2, w_2) \\
(\alpha +_K \beta) \cdot (v, w) &= ((\alpha +_K \beta) \cdot_V v, (\alpha +_K \beta) \cdot_W w) \\
&= (\alpha \cdot_V v + \beta \cdot_V v, \alpha \cdot_W w + \beta \cdot_W w) \\
&= \alpha \cdot (v, w) + \beta \cdot (v, w) \\
(\alpha \cdot_K \beta) \cdot (v, w) &= ((\alpha \cdot_K \beta) \cdot_V v, (\alpha \cdot_K \beta) \cdot_W w) \\
&= (\alpha \cdot_V (\beta \cdot_V v), \alpha \cdot_W (\beta \cdot_W w)) \\
&= \alpha \cdot (\beta \cdot (v, w))
\end{aligned}$$

und die Neutralität des neutralen Elements 1_K folgt sofort aus der komponentenweisen Neutralität. (1 Punkt)

Hausaufgabe 8.2 (Linearkombinationen) 2 Punkte

Es sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der übliche Körper der reellen Zahlen.

(i) Gegeben sei der Vektorraum der Polynome $(\mathbb{R}[t], +, \odot)$ über $\mathbb{R}$ aus Beispiel 12.3. Berechnen Sie die Linearkombination der Vektoren $p_1 = t^2 + 1$, $p_2 = -2\,t^2 + t + 1$ und $p_3 = -3\,t^2 + 2\,t + 3$ zu den Koeffizienten $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = -1$. Zeigen Sie weiterhin, dass p_3 eine Linearkombination von p_1 und p_2 ist.

(ii) Gegeben sei der Vektorraum $(\mathbb{R}_n, \oplus, \odot)$ über $\mathbb{R}$ aus Beispiel 12.3. Bestimmen Sie, für welche $r \in \mathbb{R}$ der Vektor $v := (-7, r, 2)$ eine Linearkombination der Vektoren $v_1 := (1, 2, 4)$, $v_2 := (-2, 1, 2)$ und $v_3 := (3, 1, 2)$ ist, und bestimmen Sie dann alle möglichen Koeffizienten aus Linearkombinationen von v_1, v_2, v_3, die v ergeben.

Lösung.

(*i*) Es ist

$$\begin{aligned} 2p_1 + 4p_2 - p_3 &= 2 \cdot (t^2 + 1) + 4 \cdot (-2\,t^2 + t + 1) - 1 \cdot (-3\,t^2 + 2\,t + 3) \\ &= 2\,t^2 + 2 - 8\,t^2 + 4\,t + 4 + 3\,t^2 - 2t - 3 \\ &= -3\,t^2 + 2\,t + 3 = p_3, \end{aligned}$$

wir können also direkt ablesen, dass $2p_1 + 4p_2 = 2p_3$ und teilen durch 2 auf beiden Seiten liefert, dass p_3 eine Linearkombination von p_1 und p_2 zu den Koeffizienten 1 und 2 ist. (1 Punkt)

(*ii*) Die Bedingung $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v$ liefert wegen der komponentenweise Addition und Multiplikation die drei Bedingungen

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -7 \tag{0.1}$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = r \tag{0.2}$$
$$4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 \tag{0.3}$$

also ein lineares Gleichungssystem. Die Zeilen (0.2) und (0.3) liefern nachdem man (0.3) durch 2 geteilt hat, dass $r = 1$ gelten muss, also

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -7 \tag{0.4}$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1. \tag{0.5}$$

Subtrahieren des doppelten der Zeile (0.4) von (0.5) liefert $\alpha_2 = 3 + \alpha_3$. Setzt man das in (0.4) ein, dann erhält man $\alpha_1 = -1 - \alpha_3$ und damit die Lösungen $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = 3 + \alpha_3$, $\alpha_1 = -1 - \alpha_3$. Schreibt man die Koeffizienten α_i als Vektor des $\mathbb{R}_3$, dann erhält man die Lösungen

$$\{(-1, 3, 0) + s(-1, 1, 1) \mid s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_3.$$

(1 Punkt)

Hausaufgabe 8.3 (Unterräume) 5 Punkte

(*i*) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums $(K[t], +, \cdot)$ der Polynome mit den entsprechenden Verknüpfungen einen Untervektorraum bilden.

(a) $\{p \in K[t] \mid \deg(p) > 5\}$
(b) $\{p \in K[t] \mid \deg(p) \leqslant 17\}$
(c) $\{p \in K[t] \mid \deg(p) \text{ gerade}\} \cup \{0\}$
(d) $\{\sum_{i=0}^{n} a_i t^{2i} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

(*ii*) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $(U_i, +, \cdot)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen. Zeigen Sie Lemma 12.11 des Skripts, also dass dann auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ mit $+$ und $\cdot$ ein Unterraum von $(V, +, \cdot)$ ist.

(*iii*) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $(U_1, +, \cdot)$ sowie $(U_2, +, \cdot)$ Unterräume. Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ ist.

(*iv*) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, X eine nichtleere Menge, $x_0 \in X$ beliebig und $(K^X, +, \cdot)$ der Vektorraum der Funktionen von X nach K über K mit den punktweisen Verknüpfungen sowie

$$\begin{aligned} U &:= \left\{ f \in K^X \,\middle|\, f(x_0) = 0 \right\}, \\ W &:= \left\{ f \in K^X \,\middle|\, f(x) = f(y)\ \forall x, y \in X \right\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) U und W sind Unterräume von $(K^X, +, \cdot)$ (b) $(U \cap W) = \{0\}$

(*v*) Zeigen Sie, dass $U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V :\Leftrightarrow (U$ ist Unterraum von $V)$ eine Ordnungsrelation auf der Klasse aller Vektorräume definiert.

Lösung.

(*i*) (a) $U := \{p \in K[t] \mid \deg(p) > 5\}$ ist kein Untervektorraum, denn das Nullpolynom hat Grad $-\infty < 5$ und liegt daher nicht in der Menge. (0.5 Punkte)

(b) $U := \{p \in K[t] \mid \deg(p) \leqslant 17\}$ ist ein Unterraum. Die Menge ist nichtleer, (z. B. liegt das Nullpolynom darin), und auf Grund der Rechenregeln für den Polynomgrad in Lemma 11.10 abgeschlossen bezüglich der Addition. Die skalare Multiplikation lässt den Polynomgrad unverändert oder erzeugt das Nullpolynom, ist also ebenfalls abgeschlossen. (0.5 Punkte)

(c) $U := \{p \in K[t] \mid \deg(p) \text{ gerade}\} \cup \{0\}$ ist kein Untervektorraum. Er ist zwar nichtleer, denn das Nullpolynom ist explizit reinvereinigt, und die skalare Multiplikation lässt den Polynomgrad wie erwähnt unverändert oder erzeugt das Nullpolynom, also ist $K \cdot U \subseteq U$, aber die Summe der Polynome $t^2 + t$ und $-t^2$ ergibt das Polynom t mit ungeradem Grad, also ist U unter der Summation nicht abgeschlossen. (0.5 Punkte)

(d) $U := \{\sum_{i=0}^{n} a_i t^{2i} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, also die Menge aller Polynome die Summe von Monomen mit geradem Grad sind, ist ein Untervektorraum. Nichtleer ist die Menge, denn das Nullpolynom wird durch $n = 0,\ a_0 = 0$ dargestellt. Die skalare Multiplikation lässt den Polynomgrad wie erwähnt unverändert oder erzeugt das Nullpolynom, also ist $K \cdot U \subseteq U$. Die Summe zweier solcher Polynome hat dann (nach Auffüllen von Koeffizienten mit Nullen) die Darstellung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^{2i} + \sum_{i=0}^{m} b_i t^{2i} = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) t^{2i}$$

und selbst wenn $a_i + b_i = 0$ für $i = \max(n, m)$, dann ist der Grad des Polynoms wieder gerade und es treten nur gerade Monompotenzen auf oder es entsteht das Nullpolynom, also ist $U + U \subseteq U$. (0.5 Punkte)

(ii) Wir nennen den gemeinsamen Körper, über dem wir die Vektorräume vorliegen haben, wieder $(K, +, \cdot)$. Aus der Schnittstabilität von Untergruppen folgt sofort, dass $\bigcap_{i \in I} U_i$ ebenfalls eine Untergruppe von V bzgl. $+$ ist. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} U_i + \bigcap_{i \in I} U_i &\subseteq U_i \quad \forall i \in I \\ K \cdot \bigcap_{i \in I} U_i &\subseteq U_i \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} U_i + \bigcap_{i \in I} U_i &\subseteq \bigcap_{i \in I} U_i \\ K \cdot \bigcap_{i \in I} U_i &\subseteq \bigcap_{i \in I} U_i. \end{aligned}$$

(0.5 Punkte)

(iii) Wir wissen bereits aus Hausaufgabe 5.1, dass $U_1 \cup U_2$ schon genau dann eine Untergruppe ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt. In diesem Fall ist $U_1 \cup U_2 = U_1$ oder $U_1 \cup U_2 = U_2$ und damit $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum. (0.5 Punkte)

(iv) (a) Sowohl U (Funktionen, die in x_0 den Wert Null annehmen) als auch W (Funktionen, die konstant sind) enthalten die konstante Nullfunktion, sind also nicht leer. Für $f, g \in U$, $\alpha \in K$ ist

$$\begin{aligned} (f + g)(x_0) &= f(x_0) + g(x_0) = 0 + 0 = 0 \\ (\alpha f)(x_0) &= \alpha \cdot f(x_0) = \alpha \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

und für $f, g \in W$, $\alpha \in K$ ist

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) = f(y) + g(y) = (f + g)(y) \ \forall x, y \in X \\ (\alpha f)(x) &= \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot f(y) = (\alpha \cdot f)(y) \ \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

(0.5 Punkte)

(b) Für $f \in U \cap W$ ist $f(x) = f(x_0) = 0 \ \forall x \in X$, also ist f die Nullfunktion. (0.5 Punkte)

(v) Wir zeigen die definierenden Eigenschaften einer Ordnungsrelation, also Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität. Klar ist, dass Unter-/Oberräume die gleichen Verknüpfungen und den gleichen zugrundeliegenden Körper teilen.

Offensichtlich ist jeder Vektorraum ein Untervektorraum von sich selbst, also $\overset{\text{UR}}{\preccurlyeq}$ **reflexiv**.

Sind nun U und V Vektorräume mit $U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V$ und $V \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} U$, dann ist wegen der Teilmengeneigenschaft schon $U = V$ und $\overset{\text{UR}}{\preccurlyeq}$ **antisymmetrisch**.

Sind nun U, V und W Vektorräume mit $U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V$ und $V \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} W$ dann gilt wegen der Transitivität der Mengeninklusionsordnung auf der Klasse aller Mengen, dass $U \subseteq W$. Alle Verknüpfungen sitmmen überein und U ist nichtleer sowie abgeschlossen unter den Verknüfungen, also ist $\overset{\text{UR}}{\preccurlyeq}$ **transitiv**. (1 Punkt)

Hausaufgabe 8.4 (Erzeugung in Vektorräumen) 3 Punkte

(i) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(K[t], +, \cdot)$ der Vektorraum der Polynome über K. Zeigen Sie, dass

$$\left\{\alpha_1 t^2 + \alpha_2 (t^6 - t^3) - \alpha_3 \sum_{k=3}^{17} 2t^k \,\middle|\, \alpha_i \in K \,\forall i \in \{1, 2, 3\}\right\}$$

ein Unterraum von $(K[t], +, \cdot)$ ist.

(ii) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K und $E \subseteq V$. Zeigen Sie:

(a) $\langle E \rangle = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \;\forall i = 1, \dots, n \;(v_i \in \langle E \rangle,\; \alpha_i \in K)\right\}$.

(b) $\langle E \rangle = \bigcup \{\langle E_0 \rangle \mid E_0 \subseteq E, E_0 \text{ endlich}\}$.

(iii) Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. Dann sind $(\mathcal{P}(V), \subseteq)$ und $(\{U \in \mathcal{P}(V) \mid U \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} V\}, \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq})$ partiell geordnete Mengen. Zeigen Sie, dass die Hüllenbildung $\langle \cdot \rangle : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ ein **Ordnungshomomorphismus** ist, also dass für $E, F \in \mathcal{P}(V)$ gilt:

$$E \subseteq F \;\Rightarrow\; \langle E \rangle \overset{\text{UR}}{\preccurlyeq} \langle F \rangle$$

Lösung.

(i) Bei der Menge

$$M := \left\{\alpha_1 t^2 + \alpha_2(t^6 - t^3) - \alpha_3 \sum_{k=3}^{17} 2t^k \,\middle|\, \alpha_i \in K \;\forall i \in \{1,2,3\}\right\}$$

handelt es sich um alle Linearkombinationen der Polynome t^2, $t^6 - t^3$ und $\sum_{k=3}^{17} 2t^k$. Man kann nun ein Unterraumkriterium anwenden, was auch nicht viel Aufwand ist, oder die Darstellung der von Mengen erzeugten Unterräume (12.14) verwenden, wo direkt erkennbar ist, dass

$$M = \langle t^2, t^6 - t^3, \sum_{k=3}^{17} 2t^k \rangle$$

und damit nach Konstruktion der linearen Hülle ein Unterraum. (1 Punkt)

(ii) (a) Wegen der Darstellung der von Mengen erzeugten Unterräume (12.14) ist die Aussage äquivalent zu $\langle E \rangle = \langle\langle E \rangle\rangle$, also der Idempotenz der linearen Hülle. Diese ist gerade auf Grund der Hüllenkonstruktion gegeben, denn es ist sogar genauer $\langle U \rangle = U$ für jeden Unterraum von U von V.

(b) Diese Eigenschaft folgt direkt aus der Darstellung der von Mengen erzeugten Unterräume (12.14). Ist nämlich $v \in \langle E \rangle$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ und Vektoren v_i und Skalare α_i, $i = 1, \ldots, n$, so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i,$$

also $v \in \langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle \subseteq \bigcup \{\langle E_0 \rangle \,|\, E_0 \subset E, E_0 \text{ endlich}\}$ also ist $\langle E \rangle \subseteq \bigcup \{\langle E_0 \rangle \,|\, E_0 \subset E, E_0 \text{ endlich}\}$ und die entgegengesetzte Mengeninklusion gilt, weil jede endliche Linearkombination endlich vieler Elemente aus E eine endliche Linearkombination von Elementen aus E ist. (1 Punkt)

(c) Es sei $E \subseteq F$. Wegen $F \subseteq \langle F \rangle$ ist entsprechend auch $E \subseteq \langle F \rangle$, also ist $\langle F \rangle$ ein Untervektorraum von V, der E enthält und damit auf Grund der Hüllenkonstruktion der linearen Hülle auch $\langle E \rangle \subseteq \langle F \rangle$. (1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.