R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 7

Ausgabedatum: 27. November 2023
Abgabedatum: 3. Dezember 2023

Hausaufgabe 7.1 (Körper und Körperhomomorphismen) 2 Punkte

(i) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $a, b \in K$. Zeigen Sie, dass

$$(a - x) \cdot (b - x) = 0_K$$

genau dann gilt, wenn $x = a$ oder $x = b$ ist.

(ii) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $x \cdot x = x$ in K.

(iii) Zeigen Sie, dass die Bedingung $f(1_{K_1}) = 1_{K_2}$ (also (10.3c)) in der Definition eines Körperhomomorphismus auch durch $f(1_{K_1}) \neq 0_{K_2}$ ersetzt werden kann, also dass für Körper $(K_1, +_1, \cdot_1)$ und $(K_2, +_2, \cdot_2)$ sowie $f\colon K_1 \to K_2$ mit additiver und multiplikativer Strukturverträglichkeit ((10.3a) und (10.3b)) die Bedingung $f(1_{K_1}) \neq 0_{K_2}$ hinreichend für $f(1_{K_1}) = 1_{K_2}$ ist.

Hausaufgabe 7.2 (Polynomringe) 3 Punkte

(i) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring. Bestimmen Sie die bzgl. der Polynommultiplikation invertierbaren Elemente des Polynomrings $(R[t], +, \cdot)$.

(ii) Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ zwei kommutative Ringe und $f\colon R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass durch

$$\tilde{f}\colon R_1[t] \to R_2[t]$$
$$\tilde{f}\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot_1 t^i\Big) := \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \cdot_2 t^i$$

ein Ringhomomorphismus zwischen den entsprechenden Polynomringen $(R_1[t], +_1, \cdot_1)$ und $(R_2[t], +_2, \cdot_2)$ definiert ist.

(iii) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Beweisen oder widerlegen Sie, dass

$$f\colon R[t] \to R[t]$$
$$f\Big(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot t^i\Big) := \sum_{i=1}^{k} i\, a_i \cdot t^{i-1},$$

genannt die Ableitungsabbildung auf $R[t]$, ein Ringendomorphismus von $(R[t], +, \cdot)$ in sich selbst ist.

Hausaufgabe 7.3 (Polynomgrad und Polynomdivision) 3 Punkte

(i) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring und $p, q \in R[t]$ zwei Polynome. Zeigen Sie Lemma 11.10 des Skripts, also die folgenden Aussagen:

(a) $\deg(p + q) \leqslant \max\{\deg(p),\ \deg(q)\}$.

(b) $\deg(p \cdot q) \leqslant \deg(p) + \deg(q)$.

(c) Ist R nullteilerfrei, dann gilt sogar $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$.

Dabei sollen formal für $n \in \mathbb{N}_0$ die Beziehungen $\max\{n,\ (-\infty)\} = \max\{(-\infty), n\} = n$ gelten sowie $\max\{(-\infty),\ (-\infty)\} = -\infty$ und $n + (-\infty) = (-\infty) + n = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

(ii) Nutzen Sie Polynomdivision, um zu zeigen, dass $p = t^2 + 1$ kein Teiler von $q = t^4 - t^3 + 5t^2 + t + 4$ in $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ ist.

Hausaufgabe 7.4 (Polynome über einem Potenzmengenring) 5 Punkte

Es sei X eine nichtleere Menge und $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ der entsprechende kommutative Ring über der Potenzmenge mit dem Nullelement $\emptyset$ und dem Einselement X. Wir untersuchen nun den Polynomring $(\mathcal{P}(X)[t], \triangle, \cap)$.

(i) Bestimmen Sie die Nullstellen von Polynomen der Grade 0 und 1.

(ii) Bestimmen Sie die Nullstellen von Polynomen der Grade $n \geqslant 2$.

(iii) Bestimmen Sie den Kern des Ringhomomorphismus

$$\Phi\colon (\mathcal{P}(X)[t], \triangle, \cap) \ni p \mapsto \widetilde{p} \in (\mathcal{P}(X)^{\mathcal{P}(X)}, \triangle, \cap),$$

der ein Polynom auf die zugehörige Polyomfunktion abbildet.

(iv) Berechnen Sie $\widetilde{p}\,(\llbracket 1, 10 \rrbracket)$ für $X = \mathbb{Z}$ und

$$p = \bigtriangleup_{i=1}^{3} (2^i \mathbb{N}) \cap t^i.$$

Hausaufgabe 7.5 (Spezielle Zerlegung reeller Polynome) 4 Punkte

Es sei $p \in (\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ (und damit auch $p \in (\mathbb{C}[t], +, \cdot)$). Zeigen Sie:

(i) Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p ist, dann ist auch die komplex konjugierte Zahl $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, und die Vielfachheit von λ und $\bar{\lambda}$ stimmt überein.

(ii) Ist $\deg(p) \geqslant 1$, dann existiert eine Zerlegung $p = q(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_k) \cdot g_1 \dots g_\ell$ mit Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ sowie reellen quadratischen Polynomen $g_1, \dots, g_\ell$ ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$. Insbesondere ist $\deg(p) = k + 2\,\ell$.

(iii) Ist $\deg(p)$ ungerade, dann besitzt p mindestens eine reelle Nullstelle.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.