R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 7 - Lösung

Ausgabedatum: 27. November 2023
Abgabedatum: 3. Dezember 2023

Hausaufgabe 7.1 (Körper und Körperhomomorphismen) 2 Punkte

(i) Es sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper und $a,b \in K$. Zeigen Sie, dass

$$(a-x)\cdot(b-x) = 0_K$$

genau dann gilt, wenn $x = a$ oder $x = b$ ist.

(ii) Es sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $x \cdot x = x$ in K.

(iii) Zeigen Sie, dass die Bedingung $f(1_{K_1}) = 1_{K_2}$ (also (10.3c)) in der Definition eines Körperhomomorphismus auch durch $f(1_{K_1}) \neq 0_{K_2}$ ersetzt werden kann, also dass für Körper $(K_1,+_1,\cdot_1)$ und $(K_2,+_2,\cdot_2)$ sowie $f\colon K_1 \to K_2$ mit additiver und multiplikativer Strukturverträglichkeit ((10.3a) und (10.3b)) die Bedingung $f(1_{K_1}) \neq 0_{K_2}$ hinreichend für $f(1_{K_1}) = 1_{K_2}$ ist.

Lösung.

(i) Nach Lemma 10.3 ist jeder Körper ein Ring, also gilt nach den Rechenregeln in Ringen aus Lemma 9.3, dass

$$0_K \cdot a = 0_K \quad \forall a \in K \tag{0.1}$$

(das ist gerade eines der benötigten Argumente im Beweis des Satzes).

Ist $x = a$, dann gilt die Aussage offensichtlich. Ist $x \neq a$, dann ist, weil in Gruppen Inverse Elemente eindeutig sind, $a - x \neq 0_K$, und weil $(K,+,\cdot)$ ein Körper ist, ist damit $a - x$ multiplikativ invertierbar, also gibt es $(a-x)^{-1}$ und somit ist

$$(b-x) = 1_K \cdot (b-x) = (a-x)^{-1}\cdot(a-x)\cdot(b-x) = (a-x)^{-1}\cdot 0_K = 0_K.$$

Man kann auch analog über die Kürzungsregeln argumentieren. (1 Punkt) (*ii*) Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, dann enthält K die zwei verschiedenen Elemente 1_K und 0_K. Für beide gilt die Beziehung $x \cdot x = x$ (0.1). Angenommen, es gäbe ein weiteres Element $x \in K \setminus \{0_K, 1_K\}$ mit $x \cdot x = x$, dann ist x multiplikativ invertierbar und wenn wir x^{-1} an die obige Gleichung multiplizieren, dann ergibt sich $x = 1_K$, und damit ein Widerspruch. Man kann auch analog über die Kürzungsregeln argumentieren. (0.5 Punkte)

(*iii*) Es ist

$$f(1_{K_1}) = f(1_{K_1} \cdot_1 1_{K_1}) = f(1_{K_1}) \cdot_2 f(1_{K_1}),$$

und die Anwendung der Kürzungsregeln (da $f(1_{K_1}) \neq 0_K$) liefert $f(1_{K_1}) = 1_{K_2}$. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe 7.2 (Polynomringe) 3 Punkte

(*i*) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring. Bestimmen Sie die bzgl. der Polynommultiplikation invertierbaren Elemente des Polynomrings $(R[t], +, \cdot)$.

(*ii*) Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ zwei kommutative Ringe und $f\colon R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass durch

$$\tilde{f}\colon R_1[t] \to R_2[t]$$
$$\tilde{f}\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot_1 t^i\Big) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \cdot_2 t^i$$

ein Ringhomomorphismus zwischen den entsprechenden Polynomringen $(R_1[t], +_1, \cdot_1)$ und $(R_2[t], +_2, \cdot_2)$ definiert ist.

(*iii*) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Beweisen oder widerlegen Sie, dass

$$f\colon R[t] \to R[t]$$
$$f\Big(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot t^i\Big) \coloneqq \sum_{i=1}^{k} i\, a_i \cdot t^{i-1},$$

genannt die Ableitungsabbildung auf $R[t]$, ein Ringendomorphismus von $(R[t], +, \cdot)$ in sich selbst ist.

Lösung.

(*i*) Da $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring ist, ist er insbesondere nullteilerfrei. Für $p, q \in R[t]$ mit den Darstellungen

$$p = a_m \cdot t^m + \cdots + a_1 \cdot t + a_0$$

$$q = b_n \cdot t^n \quad + \cdots + b_1 \cdot t + b_0$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$p \cdot q \coloneqq c_{m+n} \cdot t^{m+n} + \cdots + c_1 \cdot t + c_0,$$

mit den Koeffizienten

$$c_k \coloneqq \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i} = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^{k} a_i \cdot b_j$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Es ist also $p \cdot q$ das Einspolynom genau dann, wenn $c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1_R$ und $c_k = 0$ für $0 < k \leqslant m + n$. Die Koeffizienten a_0 und b_0 müssen also zueinander multiplikativ invers sein (und damit insbesondere ungleich 0_R). (0.5 Punkte)

Aus $c_k = 0_R$ für $1 \leqslant k \leqslant m + n$ folgern wir nun, dass $a_i = b_j = 0_R$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ und $1 \leqslant j \leqslant m$, also dass p und q konstant sein müssen. Entsprechend sind dann die invertierbaren Polynome gerade die konstanten Polynome, deren Koeffizient in $(R, \cdot)$ invertierbar ist. Wir führen den Beweis induktiv über $d\colon n + m$, den Höchstwert der Potenzen von t in $p \cdot q$.

Für $d = 0$ ist nichts zu zeigen, denn p und q sind dann schon konstant. (0.5 Punkte)

Gilt die Aussage für alle Höchstpotenzen kleiner als $d \geqslant 1$, dann ist

$$0_R = c_d = c_{n+m} = a_n \cdot b_m. \tag{0.4}$$

Daraus folgt mit der Nullteilerfreiheit, dass $a_n = 0_R$ oder $b_m = 0_R$. In jedem Fall lässt sich eines der beiden Polynome p, q mit einer Darstellung schreiben, deren höchste Potenz in t um eins niedriger ist und nach Induktionsvoraussetzung sind dann also p und q konstant. (0.5 Punkte)

(ii) Für $p, q \in R_1[t]$ mit den Darstellungen

$$\begin{aligned} p &= a_m \cdot_1 t^m +_1 \cdots +_1 a_1 \cdot_1 t +_1 a_0 \\ q &= b_n \cdot_1 t^n \quad +_1 \cdots +_1 b_1 \cdot_1 t +_1 b_0 \end{aligned}$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $N = \max(n, m)$ (und den notwendigen Koeffizienten in den jeweiligen Polynomen mit 0_{R_1} aufgefüllt) ist

$$\begin{aligned} \tilde{f}(p +_1 q) &= \tilde{f}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot_1 t^i + \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot_1 t^j\right) \\ &= \tilde{f}\left(\sum_{i=0}^{N} a_i \cdot_1 t^i + \sum_{i=0}^{N} b_i \cdot_1 t^i\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{f}\left(\sum_{i=0}^{N} (a_i +_1 b_i) \cdot_1 t^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{N} f(a_i +_1 b_i) \cdot_2 t^i \\
&= \sum_{i=0}^{N} (f(a_i) +_2 f(b_i)) \cdot_2 t^i \\
&= \sum_{i=0}^{N} f(a_i) \cdot_2 t^i +_2 \sum_{i=0}^{N} f(b_i) \cdot_2 t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \cdot_2 t^i +_2 \sum_{j=0}^{m} f(b_j) \cdot_2 t^j \\
&= \tilde{f}(p) +_2 \tilde{f}(q),
\end{aligned}
$$

denn da f ein Ringhomomorphismus ist, ist $f(0_{R_1}) = 0_{R_2}$. (0.5 Punkte)

Außerdem ist

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(p \cdot_1 q) &= \tilde{f}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot_1 t^i \cdot_1 \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot_1 t^j\right) \\
&= \tilde{f}\left(\sum_{k=0}^{n+m} c_k \cdot_1 t^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} f(c_k) \cdot_2 t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} f\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot_1 b_{k-i}\right) \cdot_2 t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} f(a_i) \cdot_2 f(b_{k-i})\right) \cdot_2 t^k \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \cdot_2 t^i \cdot_2 \sum_{j=0}^{m} f(b_j) \cdot_2 t^j \\
&= \tilde{f}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot_1 t^i\right) \cdot_2 \tilde{f}\left(\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot_1 t^j\right) \\
&= \tilde{f}(p) \cdot_2 \tilde{f}(q)
\end{aligned}
$$

(0.5 Punkte)

(iii) Die vorliegende Abbildung stellt das Verhalten der Ableitungen auf den zugehörigen Polynomfunktionen in t dar. Dass die Ableitungen mit Summen verträglich ist, ist ein Standardresultat aus der Analysis, das dürfte uns also keine Probleme machen. Mit Produkten hingegen ist die Ableitung im Allgemeinen nicht verträglich in dem benötigten Sinn, hier gibt es nämlich die Produktregeln für Ableitungen. Ein Beispiel, an dem man diese Unverträglichkeit auch für Polynome sieht, sind die Polynome 1_R und $1_R \cdot t$, denn hier ist

$$f(1_R \cdot 1_R \cdot t) = 1_R \neq 0_R = 0_R \cdot 1_R = f(1_R) \cdot f(t).$$

Hier sieht man, dass die Abbildung also nicht einmal im Kontext von Polynomringen ohne Eins ein Ringhomomorphismus ist. Im Kontext von Ringen mit Eins erkennt man natürlich schneller, dass $f(1_R) = 0_R$ nur genau dann gleich 1_R ist, wenn R der Nullring war. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe 7.3 (Polynomgrad und Polynomdivision) 3 Punkte

(i) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring und $p, q \in R[t]$ zwei Polynome. Zeigen Sie Lemma 11.10 des Skripts, also die folgenden Aussagen:

(a) $\deg(p + q) \leqslant \max\{\deg(p),\ \deg(q)\}$.

(b) $\deg(p \cdot q) \leqslant \deg(p) + \deg(q)$.

(c) Ist R nullteilerfrei, dann gilt sogar $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$.

Dabei sollen formal für $n \in \mathbb{N}_0$ die Beziehungen $\max\{n,\ (-\infty)\} = \max\{(-\infty), n\} = n$ gelten sowie $\max\{(-\infty),\ (-\infty)\} = -\infty$ und $n + (-\infty) = (-\infty) + n = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

(ii) Nutzen Sie Polynomdivision, um zu zeigen, dass $p = t^2 + 1$ kein Teiler von $q = t^4 - t^3 + 5t^2 + t + 4$ in $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ ist.

Lösung.

(i) Wenn p oder q das Nullpolynom ist, dann sind Aussagen (a) bis (c) klar, denn deren Produkt ist wieder das Nullpolynom mit Grad $-\infty$.

Wir nehmen also für den Rest des Beweises an, dass p und q beide nicht das Nullpolynom sind und Darstellungen

$$p = a_m \cdot t^m + \cdots + a_1 \cdot t + a_0$$

$$q = b_n \cdot t^n \quad + \cdots + b_1 \cdot t + b_0$$

besitzen. Dabei seien die führenden Koeffizienten a_m und b_n ungleich 0_R, also ist $\deg(p) = m \in \mathbb{N}_0$ und $\deg(q) = n \in \mathbb{N}_0$. (0.5 Punkte)

(a) Alle Koeffizienten $a_k + b_k$ von $p + q$ mit $k > N := \max\{m, n\}$ sind gleich 0_R. Also gilt $\deg(p + q) \leqslant \max\{m, n\} = \max\{\deg(p),\ \deg(q)\}$. (0.5 Punkte)

(b) Nach Definition der Polynommultiplikation sind alle Koeffizienten c_k von $p \cdot q$ mit $k > m+n$ gleich 0_R. Also ist $\deg(p \cdot q) \leqslant m + n = \deg(p) + \deg(q)$. (0.5 Punkte)

(c) Der führende Koeffizient von $p \cdot q$ ist $a_m \cdot b_n$. Da $a_m \neq 0_R$ und $b_n \neq 0_R$ waren und R nullteilerfrei ist, ist auch $a_m \cdot b_n \neq 0_R$. Daraus folgt mit $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$. (0.5 Punkte)

(ii) Anwendung der Polynomdivision mit Rest auf die Eingangspolynome $p = t^2 + 1$ und $q = t^4 - t^3 + 5t^2 + t + 4$ liefert

$$\begin{array}{rrrrr}
t^4 & - t^3 & + 5t^2 & + t & + 4 = (t^2+1)(t^2 - t + 4) + 2t \\
- t^4 & & - t^2 & & \\
\hline
& - t^3 & + 4t^2 & + t & \\
& t^3 & & + t & \\
\hline
& & 4t^2 & + 2t & + 4 \\
& & - 4t^2 & & - 4 \\
\hline
& & & 2t &
\end{array}$$

also den Quotienten $q_1 = (t^2 - t + 4)$ und den ersten Rest $r_1 = (2t)$, welcher ungleich Null ist. Nach Satz 11.14 ist die Darstellung in der Zerlegung eindeutig, entsprechend ist p kein Teiler von q. (1 Punkt)

Hausaufgabe 7.4 (Polynome über einem Potenzmengenring) 5 Punkte

Es sei X eine nichtleere Menge und $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ der entsprechende kommutative Ring über der Potenzmenge mit dem Nullelement $\emptyset$ und dem Einselement X. Wir untersuchen nun den Polynomring $(\mathcal{P}(X)[t], \triangle, \cap)$.

(i) Bestimmen Sie die Nullstellen von Polynomen der Grade 0 und 1.

(ii) Bestimmen Sie die Nullstellen von Polynomen der Grade $n \geqslant 2$.

(iii) Bestimmen Sie den Kern des Ringhomomorphismus

$$\Phi\colon (\mathcal{P}(X)[t], \triangle, \cap) \ni p \mapsto \widetilde{p} \in (\mathcal{P}(X)^{\mathcal{P}(X)}, \triangle, \cap),$$

der ein Polynom auf die zugehörige Polyomfunktion abbildet.

(iv) Berechnen Sie $\widetilde{p}\,([\![1, 10]\!])$ für $X = \mathbb{Z}$ und

$$p = \bigtriangleup_{i=1}^{3} (2^i \mathbb{N}) \cap t^i.$$

Lösung.

(i) Polynome vom Grad 0 sind konstant und nicht das Nullpolynom, sie haben also die Form $p = a_0$ mit $a_0 \neq \emptyset$, sie haben also keine Nullstellen. (0.5 Punkte)

Polynome vom Grad 1 haben die Form $p = a_0 \triangle (a_1 \cap t)$. Ein $t \in \mathcal{P}(X)$ erfüllt also $\widetilde{p}(t) = \emptyset$ genau dann, wenn $a_0 = a_1 \cap t$ gilt. Hier ergeben sich also drei Fälle (wobei Fall 1 strenggenommen von Fall 2 abgedeckt wird, er ist hier wegen leicht besonderer Struktur nochmal separat aufgeführt):

(a) Ist $a_0 = a_1$, dann sind die Nullstellen genau die Obermengen $\{t \in \mathcal{P}(X) \,|\, t \supseteq a_0\} = \{a_0 \cup a \,|\, a \in \mathcal{P}(X \setminus a_1)\}$. (0.5 Punkte)

(b) Ist $a_0 \subsetneq a_1$, dann sind die Nullstellen gerade gegeben durch $\{a_0 \cup a \,|\, a \in \mathcal{P}(X \setminus a_1)\}$. (0.5 Punkte)

(c) Andernfalls beinhaltet a_0 ein Element, dass nicht in a_1 und damit auch für jedes $t \in \mathcal{P}(X)$ nicht in $a_1 \cap t$ liegt. Es existieren also keine Nullstellen. (0.5 Punkte)

(ii) Für alle Monome t^i mit $i \geqslant 1$ entspricht die zugehörige Polynomfunktion dem i-fachen Schneiden jedes Auswertungsobjekts mit sich selbst, also der Identität, also der Polynomfunktion des Monoms t^1. Es ist also der Ringhomomorphismus

$$\Phi\colon (\mathcal{P}(X)[t], +, \cdot) \ni p \mapsto \widetilde{p} \in (\mathcal{P}(X)^{\mathcal{P}(X)}, \triangle, \cap)$$

der Polynome auf ihre jeweiligen Polynomfunktionen gegeben durch

$$\Phi\left(\bigtriangleup_{i=0}^{n} a_i \cap t^i\right) = a_0 \triangle \left((a_1 \triangle \cdots \triangle a_n) \cap t\right) = a_0 \triangle \left(\bigtriangleup_{i=1}^{n} a_i\right) \cap t = \Phi\left(a_0 \triangle \left(\bigtriangleup_{i=1}^{n} a_i\right) \cap t\right).$$

Da die Nullstellen eines Polynoms über Ihre Polynomfunktion definiert sind und alle Polynomfunktionen genau die Polynomfunktionen von Polynomen ersten Grades sind, haben wir mit der vorherigen Teilaufgabe schon die gesamte Struktur der Nullstellen von Polynomen über diesem Ring verstanden. Lediglich tritt an die Stelle von dem bisherigen a_1 nun $\triangle_{i=1}^n a_i$, also die Menge genau der Elemente aus X, die in einer ungeraden Anzahl der Koeffizienten a_i, $i = 1, \ldots, n$ enthalten sind. (1 Punkt)

(iii) Der Kern des Ringhomomorphismus sind alle Polynome, deren Polynomfunktion die Nullfunktion (Funktion, die konstant die leere Menge ausgibt) ist. Insbesondere muss die Auswertung an der leeren Menge selbst wieder die leere Menge sein, also

$$\emptyset = \Phi\left(\mathop{\triangle}_{i=0}^{n} a_i \cap t^i\right)(\emptyset) = \Phi\left(a_0 \triangle \left(\mathop{\triangle}_{i=1}^{n} a_i\right) \cap t\right)(\emptyset) = a_0$$

gelten. Das Gleiche muss weiterhin für die Auswertung an X gelten, also

$$\emptyset = \Phi\left(a_0 \triangle \left(\mathop{\triangle}_{i=1}^{n} a_i\right) \cap t\right)(X) = \mathop{\triangle}_{i=1}^{n} a_i$$

gelten. Das ist dann auch hinreichend dafür, dass für jedes beliebige andere $t \in \mathcal{P}(X)$ die leere Menge rauskommt. Der Kern ist also die Menge aller Polynome ohne konstanten Koeffizienten, für die kein Element existiert, welches in einer ungeraden Anzahl der Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ vorkommt:

$$\mathrm{Kern}(\Phi) = \left\{ \mathop{\triangle}_{i=1}^{n} a_i \cap t^i \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge \left(\mathop{\triangle}_{i=1}^{n} a_i = \emptyset\right)\right\}.$$

(1 Punkt)

(iv) Wie oben ausgeführt ist

$$\widetilde{p} = \Phi(p) = \mathop{\triangle}_{i=1}^{3} (2^i\mathbb{N}) \cap t^i = \left(\mathop{\triangle}_{i=1}^{3} (2^i\mathbb{N})\right) \cap t = (2\mathbb{N} \triangle 4\mathbb{N} \triangle 8\mathbb{N}) \cap t.$$

Klar ist, dass $i\mathbb{N}$ jeweils die natürlichen Zahlen liefert, die von i geteilt werden. In der großen symmetrischen Differenz verbleiben also alle geraden Zahlen, die von einer ungeraden Anzahl der Zahlen $2, 4, 8$ geteilt werden, also

$$2\mathbb{N} \triangle 4\mathbb{N} \triangle 8\mathbb{N} = (2\mathbb{N} \setminus 4\mathbb{N}) \triangle 8\mathbb{N} = (2\mathbb{N} \setminus 4\mathbb{N}) \cup 8\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \setminus (4 + 8\mathbb{N}),$$

also jede zweite natürliche Zahl und zusätzlich alle Vielfachen von 8. Schneiden wir diese Menge nun mit den natürlichen Zahlen in $[\![1, 10]\!]$, dann ist letztendlich $\widetilde{p}([\![1, 10]\!]) = \{2, 6, 8, 10\}$. (1 Punkt)

Hausaufgabe 7.5 (Spezielle Zerlegung reeller Polynome) 4 Punkte

Es sei $p \in (\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ (und damit auch $p \in (\mathbb{C}[t], +, \cdot)$). Zeigen Sie:

(i) Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p ist, dann ist auch die komplex konjugierte Zahl $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, und die Vielfachheit von λ und $\bar{\lambda}$ stimmt überein.

(ii) Ist $\deg(p) \geqslant 1$, dann existiert eine Zerlegung $p = q(t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_k) \cdot g_1 \ldots g_\ell$ mit Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ sowie reellen quadratischen Polynomen $g_1, \ldots, g_\ell$ ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$. Insbesondere ist $\deg(p) = k + 2\,\ell$.

(iii) Ist $\deg(p)$ ungerade, dann besitzt p mindestens eine reelle Nullstelle.

Lösung.

Es sei $p = \sum_{i=0}^n a_i \cdot t^i$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$.

(i) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist dann

$$p(\bar{z}) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot (\bar{z})^i = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \overline{z^i} = \sum_{i=0}^n \overline{\bar{a}_i \cdot z^i} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i \cdot z^i} = \overline{\sum_{i=0}^n a_i \cdot z^i} = \overline{p(z)}.$$

Dabei ist die rot markierte Gleichheit nur gültig, weil $a_i = \bar{a}_i$ für die reellen Koeffizienten gilt. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ also eine Nullstelle von p, dann ist

$$p(\bar{\lambda}) = \overline{p(\lambda)} = \overline{0} = 0.$$

(1 Punkt)

Um zu zeigen, dass die Vielfachheiten übereinstimmen, werden wir schon die Form der Zerlegung in der folgenden Teilaufgabe weitestgehen herleiten.

Ist p konstant, dann ist p entweder das Nullpolynom oder hat keine Nullstellen, hier ist nichts zu zeigen. Ist nun $\deg(p) \geqslant 1$, dann wissen wir, auf Grund von Satz 11.21, dass eine (eindeutige) Zerlegung

$$p = q(t - \tilde{\lambda}_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot (t - \tilde{\lambda}_s)^{n_s} \tag{0.7}$$

existiert, bei der die $\tilde{\lambda}_i \in \mathbb{C}$ gerade die Nullstellen von p und die n_i die Vielfachheiten der Nullstellen sind, sowie dass $q \in \mathbb{C}[t]$ keine Nullstellen hat (also konstant ist). Da q gerade der Koeffizient zur höchsten Potenz in p ist, muss auch außerdem q reell sein. In der obigen Zerlegung stehen also sowohl die reellen als auch die echt komplexen Nullstellen in der Zerlegung und wir wissen, dass zu jeder echt komplexen Nullstellen in der Zerlegung auch ihre komplex konjugierten Zahlen auftreten. Es verbleibt also nur noch zu zeigen, dass die Vielfachheiten der Nullstellen übereinstimmen.

Da jede reelle Nullstelle mit ihrer komplex konjugierten übereinstimmt, stimmen für alle rellen Nullstellen natürlich die Vielfachheiten der jeweils komplex Konjugierten überein. Lösen wir nun die Vielfachheiten der reellen Nullstellen explizit in Linearfaktoren auf, dann erhalten wir das Produkt der Linearfaktoren $(t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_k)$ in der alle reellen Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit vertreten sind.

Für jede echt komplexe Nullstelle $\tilde{\lambda} \in \{\tilde{\lambda}_1, \dots \tilde{\lambda}_s\} \cap \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ treten die beiden Terme $(t-\tilde{\lambda})$ und $(t-\overline{\tilde{\lambda}})$ in der Zerlegung auf, deren Produkt das *reelle*, quadratische Polynom

$$(t-\tilde{\lambda}) \cdot (t-\overline{\tilde{\lambda}}) = t^2 - \underbrace{(\tilde{\lambda}+\overline{\tilde{\lambda}})}_{\in\mathbb{R}}\, t + \underbrace{\tilde{\lambda}\cdot\overline{\tilde{\lambda}}}_{\in\mathbb{R}}$$

ergeben.

Für jedes paarweise Vorliegen der komplexen Linearfaktoren erhalten wir also ein quadratisches reelles Polynom, wenn wir die gemeinsamen Vielfachheiten der komplexen Linearfaktoren also auflösen erhalten wir aus unserer ursprünglichen Darstellung die Darstellung

$$p = \underbrace{q(t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_k)\cdot g_1 \dots g_\ell}_{=:\tilde{p}\in\mathbb{R}[t]} \cdot (t-\tilde{\lambda}_{i_1})^{d_1} \dots (t-\lambda_{i_m})^{d_m}, \tag{0.8}$$

wo die hinteren Linearfaktoren zu den $\tilde{\lambda}_{i_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit den entsprechenden Vielfachheiten gerade zu den komplexen Nullstellen gehören, bei denen die Vielfachheiten der konjugierten Paare nicht übereinstimmten. Wenn wir nun Satz 11.14 zur Polynomdivision in $\mathbb{R}[t]$ auf die reellen Polynome p und $\tilde{p}$ anwenden, dann erhalten wir die Zerlegung

$$p = \tilde{p} \cdot \tilde{q} + r$$

mit $\tilde{q} \in \mathbb{R}[t]$. Da diese Zerlegung aber auch eine Zerlegung in $\mathbb{C}[t]$ ist und diese eindeutig, muss sie mit der in (0.8) übereinstimmen, also $r = 0$ und $\tilde{q} = (t-\tilde{\lambda}_{i_1})^{d_1} \dots (t-\lambda_{i_m})^{d_m}$ sein. Da $\tilde{q}$ aber ein reelles Polynom ist, in dem keine komplexe Nullstelle paarweise mit ihrer konjugierten auftritt, liegen keine komplexen Nullstellen vor, $\tilde{q}$ muss also 1 sein, alle Vielfachheiten stimmen also überein. (2 Punkte)

(ii) Die quadratischen Polynome aus der Darstellungen der letzten Teilaufgabe sind gerade von der Form $(t-\lambda)\cdot(t-\bar{\lambda}) = t^2 - \underbrace{(\lambda+\bar{\lambda})}_{\in\mathbb{R}}\, t + \underbrace{\lambda\cdot\bar{\lambda}}_{\in\mathbb{R}}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Deren Nullstellen in $\mathbb{C}$ sind eindeutig auf λ und $\bar{\lambda}$ festgelegt, sie haben hat es keine reellen Nullstellen. Der Grad des Polynoms ist direkt ablesbar. (0.5 Punkte) (*iii*) Aus dem eben hergeleiteten Darstellung können wir sofort folgern, dass alle reellen Polynome, die nur komplexe Nullstellen haben, geraden Grad haben müssen. (0.5 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.