R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 6

Ausgabedatum: 20. November 2023
Abgabedatum: 26. November 2023

Hausaufgabe 6.1 (Normalteiler und Faktorgruppe) 5 Punkte

(i) Es sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ mit $\tilde{\cdot}$ definiert durch $[a] \tilde{\cdot} [b] := [a \cdot b]$ ein kommutatives Monoid mit neutralem Element $[1]$ ergibt, welches isomorph zu dem kommutativen Monoid $(\mathbb{Z}_m, \cdot_m)$ aus Beispiel 7.16 ist.

Beachte: Mit der Menge $\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}$ ist die Faktormenge des Normalteilers $(m\mathbb{Z}, +)$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ gemeint. Diese Faktormenge stimmt mit den Restklassen in $\mathbb{Z} / \overset{m}{\equiv} = \{\{a + m\mathbb{Z}\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ überein. Auf dieser Menge soll jetzt statt der Faktorverknüpfung $\tilde{+}$ (siehe Beispiel 8.15 im Skript) das $\tilde{\cdot}$ untersucht werden.

(ii) Bestimmen Sie für $(\mathbb{R}, +)$ und den Normalteiler $(\mathbb{Z}, +)$ die Elemente von $(\mathbb{R} / \mathbb{Z}, \tilde{+})$ mit endlicher Ordnung.

(iii) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(N, \star)$ einer ihrer Normalteiler. Zeigen Sie, dass G / N genau dann abelsch ist, wenn N die Kommutatorgruppe $K(G) := \langle \{a \star b \star a' \star b' \mid a, b \in G\} \rangle$ enthält. (Diese Aussage erweitert Satz 8.13 (iii) des Skripts).

(iv) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Zeigen Sie die Aussage von Bemerkung 8.16 im Skript, also dass die Normalteiler von $(G, \star)$ genau die Kerne geeigneter Homomorphismen sind.

Hausaufgabe 6.2 (Homomorphiesatz für Gruppen) 2 Punkte

Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ zwei Gruppen und G_1 endlich. Zeigen Sie:

(i) Ist auch G_2 endlich und $\#G_1$ und $\#G_2$ teilerfremd, dann existiert zwischen $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ nur der triviale Gruppenhomomorphismus.

Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Lagrange (Satz 7.43 im Skript).

(ii) Ist $\#G_1$ eine Primzahl, dann ist jeder Gruppenhomomorphismus von $(G_1, \star)$ nach $(G_2, \square)$ trivial oder injektiv.

Hausaufgabe 6.3 (Ringe und Unterringe) 6 Punkte

(i) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, ob die folgenden Beispiele Ringe sind, und falls ja, ob der jeweilige Ring ein Einselement besitzt oder kommutativ, nullteilerfrei bzw. ein Integritätsring ist.

(a) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cup)$
(b) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$
(c) $(\mathbb{Z}, +, \max(\cdot, \cdot))$
(d) $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$

(ii) Es sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass der Endomorphismenring $(\operatorname{End}(G), +, \circ)$ (Beispiel 9.2 des Skripts) tatsächlich ein Ring ist.

(iii) Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $((R_i, +, \cdot))_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterringen. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i \in I} R_i$ mit $+$ und $\cdot$ ein Unterring von $(R, +, \cdot)$ ist.

(iv) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{char}(R)$ eine Primzahl oder 0 ist.

Hausaufgabe 6.4 (Ringhomomorphismen) 4 Punkte

(i) Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ zwei Ringe und $f \colon R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie jeweils im Kontext von Ringen ohne Einselement:

(a) $\operatorname{Bild}(f)$ ist mit $+_2$ und $\cdot_2$ ein Unterring von $(R_2, +_2, \cdot_2)$;

(b) $\operatorname{Kern}(f)$ ist mit $+_1$ und $\cdot_1$ ein Unterring von $(R_1, +_1, \cdot_1)$.

(ii) Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ zwei Ringe und $f \colon R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus. Wenn $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ Ringe mit Eins sind, dann fordern wir zusätzlich die Bedingung $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ um f einen Ringhomomorphismus im Kontext von Ringen mit Eins nennen zu können. Zeigen Sie, dass die Bedingung $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ äquivalent zu $1_{R_2} \in \operatorname{Bild}(f)$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass es für jeden Ring $(R, +, \cdot)$ mit 1_R genau einen Ringhomomorphismus $f \colon (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (R, +, \cdot)$ gibt, der $f(1) = 1_R$ erfüllt.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.