Übung 5

Ausgabedatum: 13. November 2023
Abgabedatum: 19. November 2023

Hausaufgabe 5.1 (Untergruppen) 5 Punkte

(i) Beweisen oder widerlegen Sie, dass

(a) $(m\mathbb{Z}, +)$ für $m \in \mathbb{N}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist;
Beachte: Hier ist tatsächlich $m\mathbb{Z} := \{mz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ gemeint, keine Restklassen.

(b) $\left(\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) \geqslant 0)\right\}, \circ\right)$ eine Untergruppe von $\left(\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ bijektiv}\}, \circ\right)$ ist.

(ii) Es sei $(U, \star)$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \star)$. Zeigen Sie Lemma 7.32 des Skripts, also die folgende Aussage: Das neutrale Element e_U von $(U, \star)$ ist gleich dem neutralen Element e von $(G, \star)$. Außerdem gilt für alle $a \in U$, dass das Inverse von a in U übereinstimmt mit dem Inversen von a in G.

(iii) Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und $(U_i, \star)_{i\in I}$ eine Familie von Untergruppen mit der nichtleeren Indexmenge I. Zeigen Sie Lemma 7.35 des Skripts, also dass dann auch $\bigcap_{i\in I} U_i$ mit $\star$ eine Untergruppe von $(G, \star)$ ist.

(iv) Es seien $(G, \star)$ eine Gruppe und $(U_1, \star)$, $(U_2, \star)$ Untergruppen. Zeigen Sie, dass $(U_1 \cup U_2, \star)$ genau dann eine Untergruppe von $(G, \star)$ ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ ist.

Hausaufgabe 5.2 (Erzeugung und Ordnung) 3 Punkte

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

Beachte: In dieser Aufgabe werden wir in multiplikativer Notation arbeiten.

(i) Zeigen Sie, dass $\langle a \rangle = \{a^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ für $a \in G$ ist, sowie, dass $\operatorname{ord}(a) = \#\langle a \rangle$, wenn $\operatorname{ord}(a)$ endlich ist, und ansonsten $\langle a \rangle$ abzählbar unendlich ist.

(ii) Zeigen Sie, dass zyklische Untergruppen von $(G, \cdot)$ immer kommutativ sind.

(iii) Die Menge $\{a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \,|\, a, b \in G\}$ der **Kommutatoren** aus G erzeugt die sogenannte **Kommutatorgruppe** $K(G) \coloneqq \langle \{a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \,|\, a, b \in G\} \rangle$, eine Untergruppe von $(G, \cdot)$. Zeigen Sie, dass genau dann $(K(G), \cdot) = (\{1\}, \cdot)$ ist, wenn $(G, \cdot)$ abelsch ist.

Hausaufgabe 5.3 (Nebenklassen) 2 Punkte

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $(U, \star)$ eine Untergruppe.

(i) Zeigen Sie Folgerung 7.41 des Skripts, also dass, wenn $(G, \star)$ abelsch ist, die Äquivalenzrelationen $\sim^U$ und ${}^U\!\sim$ identisch sind und entsprechend für alle $a \in G$ die Nebenklassen $a \star U$ und $U \star a$ übereinstimmen.

(ii) Zeigen Sie den Satz 7.43 von Lagrange, also dass, wenn $(G, \star)$ endlich ist, die Beziehung $\#U \mid \#G$ gilt, also, dass die Kardinalität der Untergruppe ein Teiler der Kardinalität der Gruppe ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\#A \cup B = \#A + \#B$ für endliche, disjunkte Mengen A, B gilt.

Hausaufgabe 5.4 (Homomorphismen, Bild und Kern) 6 Punkte

(i) Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Abbildungen Homomorphismen, Endomorphismen, Isomorphismen bzw. Automorphismen sind. Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie für die Gruppenhomomorphismen außerdem Bild und Kern.

(a) $f\colon (\mathbb{R}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) \coloneqq 2^x$

(b) $f\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $f(x) \coloneqq 2^x$

(c) $f\colon (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \cup) \to (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \cap)$, $f(A) \coloneqq \mathbb{Z} \setminus A$

(d) $f\colon (\mathbb{N}, \max(\cdot, \cdot)) \to (\mathbb{N}, +)$, $f(n) \coloneqq 2\,n$

(e)[1] $f\colon (\mathbb{Z}_m, +_m) \to (\mathbb{Z}_m, +_m)$, $f(z) \coloneqq m\,z$

(ii) Es sei f ein (Halbgruppen-, Monoid-, Gruppen-)isomorphismus von $(G_1, \star)$ nach $(G_2, \square)$. Zeigen Sie, dass dann auch f^{-1} ein solcher Isomorphismus von $(G_2, \square)$ nach $(G_1, \star)$ ist.

(iii) Es seien $(G_1, \star)$ und $(G_2, \square)$ zwei isomorphe Gruppen. Zeigen Sie, dass $(G_1, \star)$ genau dann abelsch ist, wenn $(G_2, \square)$ abelsch ist.

[1] Diese Teilaufgabe war ursprünglich unter Verwendung von Notation formuliert, die erst in der Woche 06 eingeführt wird. Ich habe Sie so angepasst, dass die Idee der Aufgabe erhalten bleibt aber schon bekannte Notation verwendet wird.[GM]

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.