Übung 4

Ausgabedatum: 6. November 2023
Abgabedatum: 12. November 2023

Hausaufgabe 4.1 (Halbgruppen und Monoide) 6 Punkte

(i) Es sei X eine nichtleere Menge. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beispiele Halbgruppen bzw. Monoide sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie für Monoide das jeweilige neutrale Element an.

(a) $(\mathbb{R}^X, +)$ (b) $(\mathbb{R}^X, \cdot)$ (c) $\big(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}\big)$
(d) $(\mathcal{P}(X), \cap)$ (e) $(\mathcal{P}(X), \cup)$ (f) $(\mathcal{P}(X), \setminus)$
(g) $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ (h) $(X^X, \circ)$

(ii) Wir erweitern die Definition 7.6 des Skripts für eine Halbgruppe $(H, \star)$ wie folgt:
Ein Element $e_\ell \in H$ heißt **linksneutrales Element** von $(H, \star)$, wenn $e_\ell \star x = x \; \forall x \in H$ gilt.
Ein Element $e_r \in H$ heißt **rechtsneutrales Element** von $(H, \star)$, wenn $x \star e_r = x \; \forall x \in H$ gilt.

Zeigen Sie:

(a) I. A. sind linksneutrale Elemente nicht eindeutig. Das Gleiche gilt für rechtsneutrale Elemente.

(b) Wenn in einer Halbgruppe $(H, \star)$ ein linksneutrales Element e_ℓ und ein rechtsneutrales Element e_r existieren, dann stimmen beide überein und sind ein neutrales Element mit dem $(H, \star)$ ein Monoid ist.

Hausaufgabe 4.2 (Invertierbarkeit) 3 Punkte

Wir erweitern die Definition 7.11 des Skripts für eine Halbgruppe $(H, \star)$ mit neutralem Element e wie folgt:

Ein Element $a \in H$ heißt **linksinvertierbar**, wenn ein $b_\ell \in H$ existiert mit $b_\ell \star a = e$. In diesem Fall heißt b_ℓ ein **linksinverses Element** zu a.

Ein Element $a \in H$ heißt **rechtsinvertierbar**, wenn ein $b_r \in H$ existiert mit $a \star b_r = e$. In diesem Fall heißt b_r ein **rechtsinverses Element** zu a.

Es sei $(H, \star)$ eine Halbgruppe. Zeigen Sie:

(i) I. A. sind linksinverse Elemente nicht eindeutig. Das Gleiche gilt für rechtsinverse Elemente.

(ii) Wenn a aus H links- und rechtsinvertierbar ist, dann ist a invertierbar und jedes links- oder rechtsinverses Element zu a gleicht dem eindeutigen Inversen von a.

Hausaufgabe 4.3 (Gruppen) 10 Punkte

(i) Entscheiden Sie, welche der Beispiele aus Hausaufgabe 4.1 Teil (i) Gruppen sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(ii) Es sei $(H, \star)$ ein Monoid. Zeigen Sie, dass die Einheitengruppe

$$E(H, \star) \coloneqq \{a \in H \mid a \text{ ist invertierbar}\} \tag{7.7}$$

von $(H, \star)$ mit der Verknüpfung $\star$ tatsächlich eine Gruppe ist.

(iii) Es sei G nichtleer und $(G, \star)$ eine Gruppe. Wir definieren auf $\mathcal{P}(G)$ die Abbildung $\tilde{\star}$ durch

$$A \mathbin{\tilde{\star}} B \coloneqq \{a \star b \mid a \in A \wedge b \in B\} \quad \text{für } A, B \in \mathcal{P}(G).$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\big(\mathcal{P}(G), \tilde{\star}\big)$ eine Gruppe ist.

(iv) Zeigen Sie die folgenden Aussagen (Lemma 7.18 des Skripts):

(a) Ist $(G, \star)$ eine Gruppe und ist $a \in G$ beliebig, so sind die Rechts- und Linkstranslation $\star_a$ und ${}_a\star$ bijektive Abbildungen $G \to G$.

(b) Ist $(H, \star)$ eine nichtleere Halbgruppe und gilt für alle $a \in H$, dass die Rechts- und Linkstranslationen $\star_a$ und ${}_a\star$ surjektive Abbildungen sind, dann ist $(H, \star)$ eine Gruppe.

Hausaufgabe 4.4 (Kommutativität) 4 Punkte

(i) Entscheiden Sie, welche Beispiele aus Hausaufgabe 4.1 Teil (i) abelsche Gruppen sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(ii) Zeigen Sie, dass jede Gruppe mit höchstens vier Elementen abelsch ist.

Hausaufgabe 4.5 (Symmetrische Gruppe) 3 Punkte

Bestimmen Sie die Fehlstände, eine Zerlegung in Transpositionen und das Signum der Permutation

$$\sigma \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 7 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.