R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 3

Ausgabedatum: 30. Oktober 2023
Abgabedatum: 5. November 2023

Hausaufgabe 3.1 (Bilder und Urbilder) 4 Punkte

(i) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass $X = \emptyset$ sein muss, wenn $Y = \emptyset$ gilt.

(ii) Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen und $A \subseteq X$, $B \subseteq Z$ Mengen. Zeigen Sie, dass:

(a) $(g \circ f)(A) = g(f(A))$

(b) $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$

(c) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

(d) $B \supseteq g(g^{-1}(B))$

(iii) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Weiter seien I und J irgendwelche Indexmengen und $\{X_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Teilmengen von X sowie $\{Y_j \mid j \in J\}$ eine Menge von Teilmengen von Y. Zeigen Sie, dass dann gilt (Satz 6.8 des Skripts – Aussagen 6.4b und 6.4d):

$$(6.4b)\quad f\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i) \qquad (6.4d)\quad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$$

Hausaufgabe 3.2 (Injektivität und Surjektivität) 3 Punkte

(i) Gegeben sei die Menge der Studierenden eines Kurses S und die Menge der Plätze im Hörsaal P. Was können Sie über die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Abbildung $f\colon S \to P$ von Studierenden auf ihre Plätze in den folgenden Fällen aussagen?

(a) Es sind noch Plätze frei und jede/r hat einen eigenen Platz.
(b) Jemand sitzt auf dem Schoß eines anderen, obwohl noch Plätze frei sind.
(c) Jeder Platz ist belegt.

(ii) Es sei $f\colon X \to Y$ eine injektive Funktion. Zeigen Sie, dass $f|^{f(X)}$ (also die Einschränkung der Zielmenge auf die tatsächliche Bildmenge) bijektiv ist (Lemma 6.11 des Skripts).

Hausaufgabe 3.3 (Kardinalität) 5 Punkte

(i) Bestimmen Sie für gegebenes $m \in \mathbb{N}$ die Kardinalität der Menge der Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo m.

(ii) Zeigen Sie, dass die Aussage von Satz 6.27 des Skripts für abzählbar unendliche Mengen X, Y i. A. nicht gilt.

(iii) Es seien I eine abzählbar unendliche Indexmenge und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie disjunkter, abzählbar unendlicher Mengen. Skizzieren Sie einen Beweis für die Aussage, dass $\bigcup_{i \in I} X_i$ eine abzählbar unendliche Menge ist. (**Hinweis:** Auswahlaxiom)

(iv) Zeigen Sie, dass Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Mengen definiert.

Hausaufgabe 3.4 (Stabilität der Mächtigkeit überabz. Mengen bei Verlust abz. Teilmengen) 4 Punkte

Es seien X eine überabzählbare Menge und $Y \subsetneq X$ eine abzählbar unendliche Menge.

(i) Zeigen Sie, dass $X \setminus Y$ überabzählbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $X \setminus Y$ eine abzählbar unendliche Teilmenge enthält. (**Hinweis:** Auswahlaxiom)

(iii) Zeigen Sie, dass X und $X \setminus Y$ gleichmächtig sind.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.