R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 3 - Lösung

Ausgabedatum: 30. Oktober 2023
Abgabedatum: 5. November 2023

Hausaufgabe 3.1 (Bilder und Urbilder) 4 Punkte

(i) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass $X = \emptyset$ sein muss, wenn $Y = \emptyset$ gilt.

(ii) Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen und $A \subseteq X$, $B \subseteq Z$ Mengen. Zeigen Sie, dass:

(a) $(g \circ f)(A) = g(f(A))$
(b) $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$
(c) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
(d) $B \supseteq g(g^{-1}(B))$

(iii) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Weiter seien I und J irgendwelche Indexmengen und $\{X_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Teilmengen von X sowie $\{Y_j \mid j \in J\}$ eine Menge von Teilmengen von Y. Zeigen Sie, dass dann gilt (Satz 6.8 des Skripts – Aussagen 6.4b und 6.4d):

(6.4b) $f\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i)$

(6.4d) $f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$

Lösung.

(i) Per Definition 6.2 sind Funktionen linkstotal (Definition 6.1), es existiert also für alle x in X ein y in Y, so dass $f(x) = y$ (oder äquivalent $x f y$ in der Relationsschreibweise). Da aber Y leer ist, kann es kein x in X geben, also ist $X = \emptyset$. (0.5 Punkte)

(ii) (a) Es ist

$$\begin{aligned} (g \circ f)(A) &= \{(g \circ f)(x) \mid x \in A\} && \text{(Def. des Bilds)} \\ &= \{g(f(x)) \mid x \in A\} && \text{(Def. der Komposition)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{g(y) \mid y \in f(A)\} && \text{(Def. des Bilds)}\\
&= g(f(A)) && \text{(Def. des Bilds)}
\end{aligned}
$$

(0.5 Punkte)

(b) Es ist

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)^{-1}(B) &= \{x \in X \mid (g \circ f)(x) \in B\} && \text{(Def. des Urbilds)}\\
&= \{x \in X \mid g(f(x)) \in B\} && \text{(Def. der Komposition)}\\
&= \{x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(B)\} && \text{(Def. des Urbilds)}\\
&= f^{-1}(g^{-1}(B)) && \text{(Def. des Urbilds)}
\end{aligned}
$$

(0.5 Punkte)

(c) Nach Definition von Bild und Urbild ist

$$f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(A)\}.$$

Für jedes $x \in A$ ist nach Definition des Bilds $f(x)$ in $f(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\}$ und damit $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. (0.5 Punkte)

Beachte: Dass hier im Allgemeinen keine Mengengleichheit gelten kann, sieht man z. B. an der Funktion $f\colon \{1, 2\} \to \{1\}$, wo für $A = \{1\}$ gilt: $\{1\} \subsetneq \{1, 2\} = f^{-1}(f(\{1\}))$.

(d) Nach Definition von Bild und Urbild ist

$$g(g^{-1}(B)) = \{g(y) \mid y \in g^{-1}(B)\} = \{g(y) \mid y \in \{y \in Y \mid g(y) \in B\}\} = \{g(y) \mid g(y) \in B\} \subseteq B.$$

(0.5 Punkte)

Beachte: Dass hier im Allgemeinen keine Mengengleichheit gelten kann, sieht man z. B. an der Funktion $f\colon \{1\} \to \{1, 2\}$ mit $f(1) = 1$, wo $f(f^{-1}(\{1, 2\})) = f(\{1\}) = \{1\} \subsetneq \{1, 2\}$.

(e)

(6.4b) Per Definition des Bilds einer Funktion und des Schnitts von Mengen ist

$$
\begin{aligned}
f\Big(\bigcap_{i \in I} X_i\Big) &= f\Big(\Big\{x \in X \,\Big|\, \forall i \in I \; (x \in X_i)\Big\}\Big) && \text{(Def. des Schnitts)}\\
&= \{f(x) \in Y \mid \forall i \in I \; (x \in X_i)\} && \text{(Def. des Bilds)}\\
&\subseteq \Big\{y \in Y \,\Big|\, \forall i \in I \; (y \in f(X_i))\Big\}
\end{aligned}
$$

$$= \bigcap_{i \in I} f(X_i) \qquad \text{(Def. des Schnitts)}$$

Dabei gilt die entscheidende Inklusion der obigen Gleichungs-/Inklusionskette, da wenn ein und dasselbe $x \in X_i$ für alle i, dann ist $f(x)$ in $f(X_i)$ für alle i. (1 Punkt)

Beachte: Dass hier im Allgemeinen keine Mengengleichheit gelten kann, sieht man z. B. an der Funktion $f\colon \{1, 2\} \to \{1\}$ und den Mengen $X_1 = \{1\}$ und $X_2 = \{2\}$, wo $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ aber $f(X_1) = f(X_2) = \{1\}$ und somit $f(X_1 \cap X_2) = f(\emptyset) = \emptyset \subsetneq \{1\} = f(X_1) \cap f(X_2)$.

Es gilt in dem Beispiel nur die ungleiche Mengeninklusion, da die Funktion f nicht injektiv ist, und damit ein Element im Bildbereich existieren kann, das Urbilder in jedem der X_i hat, die aber nicht gleich sind und damit nicht im Schnitt aller X_i liegen. Für injektive Funktionen hingegen gilt hier entsprechend Mengengleichheit.

(6.4d) Per Definition des Urbilds einer Funktion und des Schnitts von Mengen ist

$$\begin{aligned}
f^{-1}\Big(\bigcap_{j \in J} Y_j\Big) &= f^{-1}\Big(\big\{y \in Y \,\big|\, \forall j \in J\ (y \in Y_j)\big\}\Big) && \text{(Def. des Schnitts)}\\
&= \{x \in X \mid \forall j \in J\ (f(x) \in Y_j)\} && \text{(Def. des Urbilds)}\\
&= \bigcap_{j \in J} \{x \in X \mid f(x) \in Y_j\} && \text{(Def. des Schnitts)}\\
&= \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j). && \text{(Def. des Urbilds)}
\end{aligned}$$

(0.5 Punkte)

Hausaufgabe 3.2 (Injektivität und Surjektivität) 3 Punkte

(i) Gegeben sei die Menge der Studierenden eines Kurses S und die Menge der Plätze im Hörsaal P. Was können Sie über die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Abbildung $f\colon S \to P$ von Studierenden auf ihre Plätze in den folgenden Fällen aussagen?

(a) Es sind noch Plätze frei und jede/r hat einen eigenen Platz.
(b) Jemand sitzt auf dem Schoß eines anderen, obwohl noch Plätze frei sind.
(c) Jeder Platz ist belegt.

(ii) Es sei $f\colon X \to Y$ eine injektive Funktion. Zeigen Sie, dass $f|^{f(X)}$ (also die Einschränkung der Zielmenge auf die tatsächliche Bildmenge) bijektiv ist (Lemma 6.11 des Skripts).

Lösung.

(i) (a) In diesem Fall ist die Abbildung f **injektiv**, denn jedes Element des Bilds (Plätze) hat ein eindeutiges Urbild (Person, die auf dem Platz sitzt). Auf jedem belegten Platz sitzt also genau eine Person. Die Abbildung ist aber **nicht surjektiv**, denn es gibt Plätze, auf denen niemand sitzt, Elemente der Zielmenge (Plätze) haben also kein Urbild (Person) unter f. Die Abbildung f kann also **nicht bijektiv** sein. (0.5 Punkte)

(b) In diesem Fall ist die Abbildung f **nicht injektiv**, denn es gibt einen Platz auf dem zwei Personen sitzen (eine Überbelegung im Bildbereich) und f ist **nicht surjektiv**, denn nicht jedes Element in der Zielmenge (Plätze) hat ein Urbild unter f. Die Abbildung kann also **nicht bijektiv** sein. (0.5 Punkte)

(c) In diesem Fall ist die Abbildung f **surjektiv**, denn jedes Element der Zielmenge (Plätze) hat mindestens ein Urbild (Person, die drauf sitzt). Wir können über **Injektivität** aber **nichts aussagen**, denn wir wissen nicht, ob eventuell ein Platz überbelegt ist. Entsprechend können wir auch über die **Bijektivität keine Aussage** treffen. (0.5 Punkte)

(ii) Wir definieren zur Abkürzung $g\colon X \to f(X)$ durch $g(x) = f(x)$ für alle $x \in X$. Wir zeigen zunächst, dass g die Injektivität von f erbt. Es seien dazu $x, x' \in X$ gegeben mit $g(x) = g(x')$, also $f(x) = f(x')$. Da f injektiv ist, folgt $x = x'$. Also ist auch g injektiv. Die Surjektivität von g folgt aus $g(X) = f(X)$. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe 3.3 (Kardinalität) 5 Punkte

(i) Bestimmen Sie für gegebenes $m \in \mathbb{N}$ die Kardinalität der Menge der Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo m.

(ii) Zeigen Sie, dass die Aussage von Satz 6.27 des Skripts für abzählbar unendliche Mengen X, Y i. A. nicht gilt.

(iii) Es seien I eine abzählbar unendliche Indexmenge und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie disjunkter, abzählbar unendlicher Mengen. Skizzieren Sie einen Beweis für die Aussage, dass $\bigcup_{i \in I} X_i$ eine abzählbar unendliche Menge ist. (**Hinweis:** Auswahlaxiom)

(iv) Zeigen Sie, dass Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Mengen definiert.

Lösung.

(i) Die Menge der Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo m ist endlich, denn es gibt genau m dieser Restklassen. Die Menge der Restklassen ist durch

$$A := \big\{[0], \dots, [m-1]\big\}$$

gegeben, denn keine Klasse kommt zweimal vor und jede weitere Menge $[r]$ für r aus $\mathbb{Z}$ ist bereits vertreten, denn $r \mod m \in \{0, \dots, m-1\}$. Um zu zeigen, dass $\#A = m$ ist geben wir eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}$ modulo m und $[\![1, m]\!]$ an. Eine Möglichkeit ist die Umkehrfunktion der kanonischen Wahl

$$\begin{aligned} f\colon [\![1, m]\!] &\to \mathbb{Z}/\overset{m}{\equiv} \\ f(n) &= [n] \end{aligned}$$

oder die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{Z}/\overset{m}{\equiv} &\to [\![1, m]\!] \\ g([n]) &= (n \mod m) + 1. \end{aligned}$$

(0.5 Punkte)

(ii) Für ein entsprechendes Gegenbeispiel benötigt man nicht einmal überabzählbare Mengen, schon bei abzählbar unendlichen Mengen beobachtet man, dass die Aussage von Satz 6.27 nicht gelten kann, also dass Injektivität und Surjektivität nicht äquivalent sind. Das zeigt zum Beispiel die injektive, aber nicht surjektive, Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ f(n) &= 2n. \end{aligned}$$

(0.5 Punkte)

(iii) Zu zeigen ist, dass eine Bijektion $f\colon \bigcup_{i\in I} X_i \to \mathbb{N}$ existiert. Wir nutzen den Fakt, dass für die Menge I und für die Mengen X_i für $i \in I$ jeweils Bijektionen in die natürlichen Zahlen existieren, das Auswahlaxiom (das uns solche Bijektionen zum Weiterverarbeiten in die Hand gibt) und ein geschicktes Abzählverfahren, um zu zeigen, dass ein solches f existiert.

Wenn man das Auswahlaxiom akzeptiert und es als nicht notwenig erachtet, dessen Nutzung weiter auszuführen, startet man an dieser Stelle für gewöhnlich ohne weitere Bemerkung dazu wie folgt in den Beweis: „Es seien also $g\colon I \to \mathbb{N}$ eine Bijektion und für jedes der $i \in I$ Bijektionen $f_i\colon X_i \to \mathbb{N}$ gegeben. Wir definieren nun die Abbildung…“ und macht weiter mit der Definition der Funktion f in (0.1). An dieser Stelle hat man dann eine abzählbar unendliche Auswahl von Bijektionen getroffen, mit der man weiter arbeitet. Ein g aus der Menge der Bijektionen von I nach $\mathbb{N}$ zu wählen(bzw. zu benennen) ist in Hinsicht auf das Auswahlaxiom unkritisch, dieser endliche Vorgang geht ohne das Auswahlaxiom. Für jedes einzelne $i \in I$ ein f_i zu wählen wäre auch kein

Problem, wir benötigen aber abzählbar undendlich viele von ihnen zur gleichen Zeit (weil I abzählbar unendlich ist) – dafür braucht man das Auswahlaxiom. Für eine ausführliche Angabe, wie man das Auswahlaxiom anwendet, würde man entsprechend Mengen von Bijektionen zu definieren, nämlich die Mengen der Bijektion von X_i nach $\mathbb{N}$, also die Mengen

$$B_i \coloneqq \{h\colon X_i \to \mathbb{N} \mid h \text{ bijektiv }\}.$$

Das Auswahlaxiom sichert nun die Existenz einer Auswahlfunktion $F\colon I \to \bigcup_{i\in I} B_i$ mit $F(i) \in B_i$ für alle $i \in I$. Die vorhin angegebenen Bijektionen f_i sind also genau die Funktionswerte $F(i)$ für eine solche Auswahlfunktion. So hat man wieder alles beisammen um die Funktion f aufbauend auf den anderen Bijektionen anzugeben. (0.5 Punkte)

Wir definieren nun die Abbildung

$$f\colon \bigcup_{i\in I} X_i \to \mathbb{N} \tag{0.1}$$

$$f\left(\left(f_{g^{-1}(k)}\right)^{-1}(j) \right) \coloneqq \left(\sum_{l=1}^{i+j-2} l \right) + k \qquad \text{für } j,k \in \mathbb{N}. \tag{0.2}$$

Wenn wir zeigen können, dass dies eine Bijektion von $\bigcup_{i\in I} X_i$ nach $\mathbb{N}$ ist, dann zeigt das entsprechend die Abzählbarkeit von $\bigcup_{i\in I} X_i$. Dass die Abbildung f tatsächlich eine Bijektion ist, ist allerdings nicht direkt ersichtlich, wird aber klar, wenn man sich genauer mit ihrer Konstruktion beschäftigt. Die Abbildung f formalisiert nämlich das Vorgehen, die Elemente der X_i jeweils zeilenweise in dem Recheckschema

$$\begin{array}{ccccr}
f^{-1}_{g^{-1}(1)}(1) & f^{-1}_{g^{-1}(1)}(2) & f^{-1}_{g^{-1}(1)}(3) & \cdots & (\text{Aufzählung von } X_{g^{-1}(1)}) \\
f^{-1}_{g^{-1}(2)}(1) & f^{-1}_{g^{-1}(2)}(2) & f^{-1}_{g^{-1}(2)}(3) & \cdots & (\text{Aufzählung von } X_{g^{-1}(2)}) \\
f^{-1}_{g^{-1}(3)}(1) & f^{-1}_{g^{-1}(3)}(2) & f^{-1}_{g^{-1}(3)}(3) & \cdots & (\text{Aufzählung von } X_{g^{-1}(3)}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}$$

anzugeben und dieses Schema dann entlang der Diagonalen von oben rechts nach unten links zu traversieren und abzuzählen, also

$$\begin{array}{ccccccc}
f^{-1}_{g^{-1}(1)}(1) & \rightarrow & f^{-1}_{g^{-1}(1)}(2) & & f^{-1}_{g^{-1}(1)}(3) & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
f^{-1}_{g^{-1}(2)}(1) & & f^{-1}_{g^{-1}(2)}(2) & & f^{-1}_{g^{-1}(2)}(3) & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
f^{-1}_{g^{-1}(3)}(1) & & f^{-1}_{g^{-1}(3)}(2) & & f^{-1}_{g^{-1}(3)}(3) & & \cdots \\
\vdots & \swarrow & \vdots & \swarrow & \ddots & &
\end{array}$$

Die Funktion f ergibt sich dann daraus, dass wir für das Bild des Elements $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j) \in X_{g^{-1}(i)}$ die Anzahl der Elemente bestimmen müssen, die sich im Schema links oben von $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j)$ befinden, und dann die Position von $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j)$ auf seiner Diagonalen drauf addieren müssen. Das Element $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j)$ steht auf der Diagonalen mit der Nummer $(i + j - 1)$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ hat die jeweils k-te Diagonal genau k Elemente, die Anzahl der Elemente links oben von $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j)$ ergeben sich also genau zu $\sum_{k=1}^{i+j-2} k$. Die Position von $f^{-1}_{g^{-1}(i)}(j)$ auf seiner Diagonalen ist genau i. Damit ist die Injektivität und Surjektivität von f sofort erkenntlich. Dass die Abbildung tatsächlich rechtseindeutig ist, folgt aus der Disjunktheit der X_i, während die Linkstotalität aus der Bijektionseigentschaft der f_i folgt. (2 Punkte)

Beachte: Wenn die Mengen X_i nicht mehr disjunkt sind, dann gilt die Aussage weiterhin. Die Konstruktion der Bijektion ist aber deutlich schwieriger explizit anzugeben, weil man doppelt vorkommende Elemente überspringen muss.

(iv) Die konkrete Relation auf der Klasse der Mengen, die es zu untersuchen gilt, ist

$$R := \{(X, Y) \mid \exists \text{ Bijektion } f \colon X \to Y\}.$$

Wir prüfen für R die definierenden Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nach, also Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

Es seien dafür X, Y, Z Mengen. Dann können wir für den Nachweis von XRX (der **Reflexivität** von R) die (natürlich bijektive) Identität $\mathrm{id} \colon X \to X$ angeben. (0.5 Punkte)

Für die **Symmetrie** sei nun XRY, d. h. es existiert eine Bijektion $f \colon X \to Y$. Da die Abbildung f bijektiv ist, existiert ihre Inverse $f^{-1} \colon Y \to X$, die ebenfalls bijektiv ist, daher ist YRX. (0.5 Punkte)

Für die **Transitivität** sei nun XRY und YRZ, es existieren also Bijektionen $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$. Dann ist die Komposition $g \circ f \colon X \to Z$ ebenfalls eine Bijektion, siehe Satz 6.21 des Skripts, und damit XRZ. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe 3.4 (Stabilität der Mächtigkeit überabz. Mengen bei Verlust abz. Teilmengen) 4 Punkte

Es seien X eine überabzählbare Menge und $Y \subsetneq X$ eine abzählbar unendliche Menge.

(i) Zeigen Sie, dass $X \setminus Y$ überabzählbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $X \setminus Y$ eine abzählbar unendliche Teilmenge enthält. (**Hinweis:** Auswahlaxiom)

(iii) Zeigen Sie, dass X und $X \setminus Y$ gleichmächtig sind.

Lösung.

(i) Es ist $X = X \setminus Y \dot{\cup} Y$, also darstellbar als die disjunkte Vereinigung. Angenommen $X \setminus Y$ wäre abzählbar unendlich und $f \colon X \setminus Y \to \mathbb{N}$ eine Bijektion sowie $g \colon Y \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann wäre $h \colon X \to \mathbb{N}$

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) & x \in X \setminus Y \\ 2g(x) - 1 & x \in Y \end{cases}$$

(die Abbildung, die die Elemente aus $X \setminus Y$ und Y abwechselnd auf die natürlichen Zahlen abbildet) ebenfalls eine Bijektion und damit X abzählbar undendlich, im Widerspruch zur Überabzählbarkeit.

Angenommen $X \setminus Y$ wäre endlich mit $m \in \mathbb{N}$ Elementen und $f \colon X \setminus Y \to [\![1, m]\!]$ eine Bijektion sowie $g \colon Y \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, dann könnten wir entsprechend die Bijektion $h \colon X \to \mathbb{N}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \setminus Y \\ g(x) + m & x \in Y \end{cases}$$

angeben und entsprechend einen analogen Widerspruch produzieren.

Im Fall $X \setminus Y = \emptyset$ ist $X = Y$ abzählbar im Widerspruch zur Voraussetzung. (1 Punkt)

(ii) Wir müssen zeigen, dass es eine Bijektion von einer Teilmenge aus X in die natürlichen Zahlen gibt.

Klar ist, dass wir für jede endliche Menge von genau $n \in \mathbb{N}$ verschiedenen Elementen $S_n := \{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}$ ein weiteres Element $x^{(n+1)} \in (X \setminus Y) \setminus S_n$ wählen können, denn sonst wäre $X \setminus Y$ endlich. Wir erhalten also induktiv für jedes beliebige aber feste $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Folge paarweise verschiedener Elemente $x_1, \dots, x_n$, also das folgende Resultat:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_1, \dots, x_n \colon i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j. \tag{0.3}$$

Dies ist aber wie schon gesagt ein induktiver Prozess, der uns nicht die Existenz einer unendlichen Folge mit der entsprechenden Eigenschaft liefert. Das Auswahlaxiom sichert uns, dass wir nicht nur eine endliche Folge wählen können, sondern auch eine unendliche, also das eigentlich gewünschte Resultat

$$\exists (\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}\ \forall n \in \mathbb{N} \colon i \neq j \Rightarrow \tilde{x}_i \neq \tilde{x}_j. \tag{0.4}$$

Ein sauberer Beweis dieser Tatsache geht wie folgt: Die Existenzaussage (0.3) zeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge von X mit Kardinalität n existiert. Wir können also die Familie nichtleerer Mengen

$$(P_n)_n := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \#A = 2^n\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$$

betrachten. Anwendung des Auswahlaxioms liefert uns eine Familie $(X_n)_n$ von Mengen $X_n \in \mathcal{P}(X)$ mit $\#(X_n) = 2^n$. Aus diesen definieren wir die Familie $(\widetilde{X}_n)_n$ der Mengen $\widetilde{X}_n := X_n \setminus (\bigcup_{k=1}^{n-1} X_k)$. Da $\bigcup_{k=1}^{n-1} X_k$ höchstens $\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n - 2$ Elemente hat, sind alle $\widetilde{X}_n$ nichtleer und das Auswahlaxiom liefert aus der Familie $(\widetilde{X}_n)_n$ eine Folge $\tilde{x}_n$ paarweise ungleicher Elemente, also die Aussage (0.4). (1.5 Punkte)

(iii) Wir konstruieren eine Bijektion zwischen X und $X \setminus Y$. Es seien dafür Bijektionen $f\colon F \to \mathbb{N}$ und $g\colon Y \to \mathbb{N}$ gegeben, wobei F wieder die eben konstruierte abzählbar unendliche Teilmenge von $X \setminus Y$ bezeichnet. Wir definieren dann die nach Konstruktion bijektive Abbildung

$$
\begin{aligned}
h\colon X &\to X \setminus Y \\
h(x) &= \begin{cases} x & x \in X \setminus (Y \cup F) \\ f^{-1}\big(2f(x) - 1\big) & x \in F \\ f^{-1}\big(2g(x)\big) & x \in Y \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Die Idee bei der Konstruktion dieser Abbildung ist, dass man X in 3 Teile zerlegen kann, nämlich in zwei disjunkte abzählbar unendliche Teilmengen Y und F und den entsprechenden Rest $X \setminus (Y \cup F)$. Für die Konstruktion der Bijektion von X auf $X \setminus Y$ baut man nun eine Bijektion zwischen den abzählbar unendlichen Mengen $Y \cup F$ und F indem man die Abzählung derer Elemente alterniert und dann die Identität auf dem überabzählbaren Rest nimmt. Die abzählbar unendliche Menge in $F \subseteq X \setminus Y$ ist letztendlich ausreichend mächtig, um die Bijektion auf die größere Menge $F \cup Y$ zu erlauben. (1.5 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.