R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung 2

Ausgabedatum: 23. Oktober 2023
Abgabedatum: 29. Oktober 2023

Hausaufgabe 2.1 (Übungen zu Mengen) 3 Punkte

(i) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

(ii) Nutzen Sie Mengenkomprehension, um die Menge aller Teilmengen der ganzen Zahlen, die eine ungerade Zahl größer als 11 enthalten, zu beschreiben.

(iii) Es seien A_i für $i = 1, \ldots, 8$ Mengen. Setzen Sie in der folgenden daraus konstruierten Menge alle Klammern, die auf Grund der Bindungsregeln (Ausdruck (4.19) des Skripts) weggelassen werden konnten.

$$A_1^c \cap A_2 \cup A_3^c \setminus A_4^c \cup A_5 \cap A_6 \setminus A_7 \cup A_8^c$$

Hausaufgabe 2.2 (Aussagen über Mengen) 5 Punkte

(i) Beweisen oder widerlegen Sie die Assoziativität der Mengendifferenz „\“.

(ii) Es sei $\mathcal{U}$ eine nichtleere Menge von Teilmengen einer Menge X. Zeigen Sie, dass

$$\left(\bigcap \mathcal{U}\right)^c = \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{U}\ (x \in U^c)\}.$$

Beachte: Dies ist eine Verallgemeinerung des ersten De Morganschen Gesetzes in Lemma 4.5 des Skripts.

(iii) Es sei n eine natürliche Zahl und X eine Menge mit genau n verschiedenen Elementen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ genau 2^n verschiedene Elemente enthält.

Hausaufgabe 2.3 (Ordnungsrelationen) 4 Punkte

(i) Zeigen Sie, dass die homogene Relation $R := \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \forall i = 1, 2\ (x_i \leqslant y_i)\}$ auf $\mathbb{R}^2$ eine Halbordnung aber keine Totalordnung ist. Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \wedge x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0\}$ bzgl. R und erklären Sie, ob es sich dabei um ein Minimum respektive ein Maximum handelt.

(ii) Es sei X eine Menge. Zeigen Sie: Ist R eine Halbordnung auf X, dann ist auch die inverse Relation R^{-1} eine Halbordnung auf X. Ist R eine Totalordnung, dann auch R^{-1} (Lemma 5.9 des Skripts).

Hausaufgabe 2.4 (Äquivalenzrelationen) 5 Punkte

(i) Gegeben sei die Menge der vorläufigen rationalen Zahlen $\widetilde{\mathbb{Q}} := \left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ (also die Menge ganzzahliger „Brüche“). Zeigen Sie, dass

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \tag{5.8}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\widetilde{\mathbb{Q}}$ definiert.

(ii) Es sei X eine nichtleere Menge und R, S Äquivalenzrelationen auf X. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $S \circ R$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist.

(iii) Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{U}$ eine Partition von X. Zeigen Sie, dass es dann eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation R auf X gibt, sodass $\mathcal{U}$ genau aus den Äquivalenzklassen von R besteht (Satz 5.19(ii) des Skripts).

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.