Übung 2 - Lösung

Ausgabedatum: 23. Oktober 2023
Abgabedatum: 29. Oktober 2023

Hausaufgabe 2.1 (Übungen zu Mengen) 3 Punkte

(i) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

(ii) Nutzen Sie Mengenkomprehension, um die Menge aller Teilmengen der ganzen Zahlen, die eine ungerade Zahl größer als 11 enthalten, zu beschreiben.

(iii) Es seien A_i für $i = 1, \ldots, 8$ Mengen. Setzen Sie in der folgenden daraus konstruierten Menge alle Klammern, die auf Grund der Bindungsregeln (Ausdruck (4.19) des Skripts) weggelassen werden konnten.

$$A_1^c \cap A_2 \cup A_3^c \setminus A_4^c \cup A_5 \cap A_6 \setminus A_7 \cup A_8^c$$

Lösung.

(i) Die Definition der Potenzmenge einer Menge X ist

$$\mathcal{P}(X) \coloneqq \{A \,|\, A \subseteq X\} \tag{4.20}$$

und entsprechend ist (siehe Beispiel 4.7 des Skripts)

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

also eine Menge mit einem Element, nämlich der leeren Menge. Deren Potenzmenge ist also

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,.$$

(0.5 Punkte)

(ii) Die ganzen Zahlen sind mit $\mathbb{Z}$ notiert. Unsere Zielmenge soll eine Menge von Teilmengen $A \subseteq \mathbb{Z}$ sein, die eine noch zu spezifizierende Bedingung erfüllen. Unsere Mengenbeschreibung wird also die Form

$$\{A \subseteq \mathbb{Z} \,|\, A \text{ erfüllt die Bedingung } \}$$

haben.

Die charakterisierende Bedingung der Aufgabenstellung ist, dass eine Zahl $x \in A$ existiert, die ungerade und größer als 11 ist. Die Bedingungen an x kann man auf verschiedene Weisen schreiben. Eine Möglichkeit ist, die Konjunktion der zwei Aussagen

$$\exists\, y \in \mathbb{Z}\,(x = 2y + 1) \qquad (x \text{ ungerade})$$
$$x > 11 \qquad (x \text{ größer } 11)$$

zu fordern.

Das ergibt die Mengenbeschreibung

$$\left\{A \subseteq \mathbb{Z} \,\middle|\, \exists x \in A\, \big(x > 11 \land (\exists\, y \in \mathbb{Z}\,(x = 2y + 1))\big)\right\}.$$

(1 Punkt)

(iii) Wir wenden die Bindungsregeln

$$\cdot^c \text{ bindet stärker als } \setminus \text{ bindet stärker als } \cap \text{ bindet stärker als } \cup \tag{4.19}$$

an und arbeiten uns dabei schrittweise von den am stärksten bindenden Mengenoperationen (von innen) zu den am schwächsten bindenden (nach außen) vor. Da die Klammersetzung gleiche Mengen liefert entsteht dabei die folgende Mengengleichheitskette:

$$\begin{aligned}
& A_1^c \cap A_2 \cup A_3^c \setminus A_4^c \cup A_5 \cap A_6 \setminus A_7 \cup A_8^c \\
&= (A_1^c) \cap A_2 \cup (A_3^c) \setminus (A_4^c) \cup A_5 \cap A_6 \setminus A_7 \cup (A_8^c) && (\text{Klammern für } \cdot^c) \\
&= (A_1^c) \cap A_2 \cup ((A_3^c) \setminus (A_4^c)) \cup A_5 \cap (A_6 \setminus A_7) \cup (A_8^c) && (\text{Klammern für } \setminus) \\
&= \big((A_1^c) \cap A_2\big) \cup ((A_3^c) \setminus (A_4^c)) \cup \big(A_5 \cap (A_6 \setminus A_7)\big) \cup (A_8^c). && (\text{Klammern für } \cap)
\end{aligned}$$

Man könnte am Ende noch eine finale Klammer für die Mengenvereinigung um den gesamten Ausdruck setzen, diese würde aber keinen Informationsgewinn oder Lesbarkeitsgewinn liefern, da die Mengenvereinigung die letzte verbleibende Operation ist. (1.5 Punkte)

Hausaufgabe 2.2 (Aussagen über Mengen) 5 Punkte

(i) Beweisen oder widerlegen Sie die Assoziativität der Mengendifferenz „\“.

(ii) Es sei $\mathcal{U}$ eine nichtleere Menge von Teilmengen einer Menge X. Zeigen Sie, dass

$$\left(\bigcap \mathcal{U}\right)^c = \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{U}\ (x \in U^c)\}.$$

Beachte: Dies ist eine Verallgemeinerung des ersten De Morganschen Gesetzes in Lemma 4.5 des Skripts.

(iii) Es sei n eine natürliche Zahl und X eine Menge mit genau n verschiedenen Elementen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ genau 2^n verschiedene Elemente enthält.

Lösung.

(i) Die Mengendifferenz ist nicht assoziativ. Wir widerlegen das, indem wir ein Beispiel für Mengen A, B, C angeben, wo $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$, denn dann kann die Assoziativität nicht allgemein gültig sein.

Für ein einfaches Beispiel wählt man A, B und C nichtleer und gleich zu wählen (z. B. alle drei als $\mathbb{N}$), denn dann ist

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus A) \setminus A = \emptyset \setminus A = \emptyset \neq A = A \setminus \emptyset = A \setminus (A \setminus A) = A \setminus (B \setminus C).$$

(1 Punkt)

Es gilt allerdings allgemein die Inklusion $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$, denn es ist

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \setminus C &= A \setminus (B \cup C)\\ A \setminus (B \setminus C) &= A \setminus (B \cup C) \cup (A \cap C).\end{aligned}$$

(ii) Bei dieser Aussage handelt es sich um die allgemeinere Version eines der De Morganschen Gesetze, das sich in Lemma 4.5 für zwei Mengen anstatt für allgemeinere Mengen von Mengen findet. Wir setzen für den Nachweis lediglich die Definitionen der Komplemente und der Schnitte bzw. Vereinigungen ein und formulieren die charakterisierende Bedingung der Menge logisch äquivalent um. Dabei erhalten wir die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}\left(\bigcap \mathcal{U}\right)^c &= \left\{x \in X \,\middle|\, x \notin \bigcap \mathcal{U}\right\} && \text{(Definition des Komplements)}\\ &= \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{U}\ (x \notin U)\} && \text{(Definition des Schnitts, Negation)}\\ &= \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{U}\ (x \in U^c)\} && \text{(Definition des Komplements)}\end{aligned}$$

(Rot markiert sind die Negationen, in denen die negierende Eigenschaft des Komplements kodiert ist.)

(1.5 Punkte)

(iii) Da wir diese Aussage für jede feste natürliche Zahl n zeigen müssen, bietet sich ein Induktionsbeweis an. Für den **Induktionsanfang** bei $n = 1$ ist die Aussage schnell gezeigt, denn für eine Menge X mit genau einem Element ist die Potenzmenge lediglich $\mathcal{P}(x) = \{\emptyset, X\}$ und besitzt damit $2^1 = 2$ Elemente. (0.5 Punkte)

Haben wir die Aussage für Mengen mit genau n Elementen für ein beliebiges n gezeigt, dann können wir den **Induktionsschluss** von Mengen mit n Elementen auf Mengen mit $n + 1$ Elementen wie folgt argumentieren: Es sei X eine Menge mit $n+1$ Elementen und $x \in X$. Dann hat $X \setminus x$ genau $n \in \mathbb{N}$ Elemente und damit hat $\mathcal{P}(X \setminus \{x\})$ nach **Induktionsvoraussetzung** genau 2^n Elemente. Wir zeigen nun, dass wir die Potenzmenge von X als die disjunkte Mengenvereinigung

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X \setminus \{x\}) \,\dot{\cup}\, \{A \cup \{x\} \mid A \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})\} \tag{0.1}$$

schreiben können. Dann folgt sofort, dass $\mathcal{P}(X)$ genau doppelt so viele Elemente wie $\mathcal{P}(X \setminus \{x\})$ enthält (denn die rechte Menge hat genau so viele Elemente wie die linke, und damit 2^n), und damit $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Elemente. Dass die Vereinigung disjunkt ist sieht man sofort daran, dass das Element x in jeder der Mengen aus der rechten Menge $\{A \cup \{x\} \mid A \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})\}$ enthalten ist aber in keiner der Mengen aus der Menge $\mathcal{P}(X \setminus \{x\})$. Weiterhin tauchen in der Vereinigung auf der rechten Seite der Gleichung nur Teilmengen von X auf, also muss

$$\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{P}(X \setminus \{x\}) \,\dot{\cup}\, \{A \cup \{x\} \mid A \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})\}$$

gelten.

Für jedes $B \in \mathcal{P}(X)$ gilt auch $B \setminus \{x\} \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})$. Es gilt außerdem (abhängig davon ob $x \in B$) entweder $B = B \setminus \{x\}$ oder $B = B \setminus \{x\} \cup \{x\}$ und damit aber auf jeden Fall

$$\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(X \setminus \{x\}) \,\dot{\cup}\, \{A \cup \{x\} \mid A \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})\}$$

und damit die Gleichheit der Mengen in (0.1). (2 Punkte)

Hausaufgabe 2.3 (Ordnungsrelationen) 4 Punkte

(i) Zeigen Sie, dass die homogene Relation $R := \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \forall i = 1, 2\ (x_i \leqslant y_i)\}$ auf $\mathbb{R}^2$ eine Halbordnung aber keine Totalordnung ist. Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \wedge x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0\}$ bzgl. R und erklären Sie, ob es sich dabei um ein Minimum respektive ein Maximum handelt.

(ii) Es sei X eine Menge. Zeigen Sie: Ist R eine Halbordnung auf X, dann ist auch die inverse Relation R^{-1} eine Halbordnung auf X. Ist R eine Totalordnung, dann auch R^{-1} (Lemma 5.9 des Skripts).

Lösung.

(i) Wir prüfen die definierenden Eigenschaften einer Ordnungsrelation (Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität) nach.

Es seien also x, y und z aus $\mathbb{R}^2$ gegeben.

Da $x_i \leqslant x_i$ für alle Komponentenindizes $i = 1, 2$ ist, gilt $x\,R\,x$ und damit die **Reflexivität** der Relation.

Nun ist $x\,R\,y$ und $y\,R\,x$ genau dann gleichzeitig erfüllt, wenn $x_i \leqslant y_i \wedge y_i \leqslant x_i$ für $i = 1, 2$ und damit $x_i = y_i$ für $i = 1, 2$ und damit $x = y$, womit R **antisymmetrisch** ist.

Ist $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$, dann ist $x_i \leqslant y_i$ und $y_i \leqslant z_i$ für $i = 1, 2$ und damit sofort wegen der Transitivität der Totalordnung in $\mathbb{R}$ auch $x_i \leqslant z_i$ für $i = 1, 2$, also $x\,R\,z$ und damit ist R ebenfalls **transitiv**. (1 Punkt)

Dass es sich bei R um keine Totalordnung handelt sieht man z. B. an den beiden Punkten $(1, 0)$ und $(0, 1)$, die nicht vergleichbar sind. (0.5 Punkte)

Bei der Menge $A := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \wedge x_1 \leqslant 0 \wedge x_2 \leqslant 0\right\}$ handelt es sich um das abgeschlossene, linke untere Kreisscheibenviertel . Diese Menge enthält die Punkte $(-1, 0)$ und $(0, -1)$. Jede untere Schranke x an A muss also mindestens mit diesen beiden Punkten vergleichbar sein, also $x_1 \leqslant -1$ und $x_2 \leqslant -1$ für jede untere Schranke x an A gelten. Der Punkt $(-1, -1)$ selbst erfüllt diese Bedingung und stellt damit die kleinste untere Schranke dar, also das **Infimum**. Da der Punkt $(-1, -1)$ die quadratische Ungleichung nicht erfüllt, liegt das Infimum nicht in A und ist entsprechend **kein Minimum**.

Analog zeigt man, dass $(0, 0)$ das **Supremum** ist, was allerdings in A liegt und damit **ein Maximum** ist. (1 Punkt)

(ii) Von den definierenden Eigenschaften einer (totalen) Ordnungsrelation (Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität, Totalität) erkennt man in der Definition der **Reflexivität**, der **Antisymmetrie** und der **Totalität** sofort, dass es keine Rolle spielt ob man eine Relation oder ihre Inverse betrachtet, weil in der Definition immer Tupel (x, y) *und* (y, x) betrachtet werden. (0.5 Punkte)

Für den Nachweis der **Transitivität** seien x, y und z aus X gegeben, so dass für die inverse Relation R^{-1} gilt:

$$x\,R^{-1}\,y \;\wedge\; y\,R^{-1}\,z.$$

Per Definition heißt das, dass

$$y\,R\,x \;\wedge\; z\,R\,y$$

und somit gilt auf Grund der Transitivität von R auch $z\,R\,x$, also wieder per Definition $x\,R^{-1}\,z$ und damit die Transitivität von R^{-1}. (1 Punkt)

Hausaufgabe 2.4 (Äquivalenzrelationen) 5 Punkte

(i) Gegeben sei die Menge der vorläufigen rationalen Zahlen $\widetilde{\mathbb{Q}} := \left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ (also die Menge ganzzahliger „Brüche"). Zeigen Sie, dass

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \tag{5.8}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\widetilde{\mathbb{Q}}$ definiert.

(ii) Es sei X eine nichtleere Menge und R, S Äquivalenzrelationen auf X. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $S \circ R$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist.

(iii) Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{U}$ eine Partition von X. Zeigen Sie, dass es dann eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation R auf X gibt, sodass $\mathcal{U}$ genau aus den Äquivalenzklassen von R besteht (Satz 5.19(ii) des Skripts).

Lösung.

(i) Wir prüfen die definierenden Eigenschaften einer Äquivalenzrelation (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität) nach. Seien dafür also $q_1, q_2, q_3 \in \widetilde{\mathbb{Q}}$ mit den Darstellungen

$$q_1 = \frac{m_1}{n_1}, \qquad q_2 = \frac{m_2}{n_2}, \qquad q_3 = \frac{m_3}{n_3}$$

gegeben. Dann gilt $m_1 n_1 = m_1 n_1$ und damit $q_1 \, R \, q_1$, also ist R **reflexiv**. Ist $q_1 \, R \, q_2$, dann ist also $m_1 n_2 = m_2 n_1$ und damit wegen der Symmetrie der Gleichheit in $\mathbb{Z}$ auch $m_2 n_1 = m_1 n_2$, also $q_2 \, R \, q_1$, und damit R **symmetrisch**. Ist $q_1 \, R \, q_2$ und $q_2 \, R \, q_3$, dann ist

$$m_1 n_2 = m_2 n_1 \quad \text{und} \quad m_2 n_3 = m_3 n_2, \quad \text{also} \quad m_1 m_2 n_2 n_3 = m_2 m_3 n_1 n_2 \Rightarrow m_2 n_2 (m_1 n_3 - m_3 n_1) = 0.$$

Entsprechend muss $m_2 = 0$ und damit $m_1 = m_3 = 0$ sein, woraus $m_1 n_3 = m_3 n_1$ folgt, also entsprechend $q_1 \, R \, q_3$, oder es ist $m_1 n_3 - m_3 n_1 = 0$ und damit $m_1 n_3 = m_3 n_1$ also auch $q_1 \, R \, q_3$ und somit R **transitiv**. (1.5 Punkte)

(ii) Im Allgemeinen ist die Komposition zweier Äquivalenzrelationen keine Äquivalenzrelation. Man kann zwar zeigen, dass die Komposition $S \circ R$ weiterhin reflexiv ist, denn $(x, x) \in R \cap S$ für alle $x \in X$, man kann also in der Definition der Komposition $y = x$ wählen, weder die Symmetrie noch die Transitivität bleiben im Allgemeinen jedoch erhalten. Ein Beispiel, welches das beides zeigt, ist z. B. die Menge $X = \{1, 2, 3\}$ mit den Äquivalenzrelationen

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\} \qquad \text{und} \qquad S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\},$$

$$S \circ R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (1,3)\}.$$

Hier ist zwar $1\,(S \circ R)\,3$, aber nicht $3\,(S \circ R)\,1$, sondern lediglich $3\,(R \circ S)\,1$ gilt, für den Rückweg dreht sich also die Reihenfolge gerade ungünstig um. Das fehlen von $(3,1)$ zeigt auch gleich, dass die Transitivität nicht gilt, denn es sind ja $(3,2)$ und $(2,1)$ in $S \circ R$. (1.5 Punkte)

(iii) Wir definieren die Relation

$$R \coloneqq \{(x,y) \mid \exists U \in \mathcal{U}(x \in U \wedge y \in U)\} \subseteq X^2,$$

von der wir zeigen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Nach Eigenschaft (i) der Partition ist $(x,x) \in R$ für alle $x \in X$ und damit R **reflexiv**.

Es seien nun weiter x, y und z aus X. Ist $x\,R\,y$, dann gibt es also ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \wedge y \in U$ und damit auch wegen der Symmetrie von der Kunjunktion auch $y \in U \wedge x \in U$, also yRx und damit R **symmetrisch**.

Ist $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$, dann gibt es Mengen U und U' mit $x \in U \wedge y \in U$ und $y \in U' \wedge z \in U'$. Nach Eigenschaft (ii) der Partition und weil $y \in U \cap U'$, muss $U = U'$ sein und damit auch $x \in U \wedge z \in U$ also $x\,R\,z$ und damit R **transitiv**.

Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation entsprechen nach Konstruktion genau den $U \in \mathcal{U}$, d. h. es ist $U = [x]$ für alle x in U. Da Äquivalenzrelationen genau dann übereinstimmen, wenn Ihre Äquivalenzklassen übereinstimmen, ist diese Relation eindeutig bestimmt. (2 Punkte)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.