Übung 1 - Lösung

Ausgabedatum: 16. Oktober 2023
Abgabedatum: 22. Oktober 2023

Hausaufgabe 1.1 (Aussagen und Wahrheitswert) 3 Punkte

Entscheiden Sie, welche der folgenden Sätze Aussagen sind. Begründen Sie Ihre Entscheidungen kurz und geben Sie für die Aussagen (wenn möglich) ihren Wahrheitswert an.

(i) Alle Kängurus haben Flügel.

(ii) Grün ist die schönste Farbe.

(iii) Morgen wird es in Mannheim geregnet haben.

(iv) Hoffentlich schneit es diesen Winter viel.

(v) Lichtjahre sind keine Zeiteinheit.

(vi) Geh jetzt ins Bett!

Lösung.

Diese Aufgabe hat ein grundlegendes Problem: Wann immer Kommunikation zwischen verschiedenen Parteien stattfinden soll, müssen alle Parteien das gleiche Verständnis der verwendeten Begriffe haben, um Missverständnisse auszuschließen. Alle obigen Beispiele sind Sätze aus der Umgangssprache und verwendet Begriffe, die nur in dem Rahmen der Umgangssprache „definiert" sind. In der Sprache richtet sich der benötigte Genauigkeitsgrad von Begriffen nach der jeweiligen Anwendung und den Konsequenzen eines Missverständnisses. Man kann sich dafür z. B. die Genauigkeit der verwendeten Sprache in der Mathematik, in der Juristik, bei Sportveranstaltungen oder bei Familientreffen ansehen (in der Reihenfolge absteigender Genauigkeit).

Als Referenzsystem dieser Aufgabe soll das Allgemeinwissen und die Umgangssprache herhalten. Die Beispiele sind so gewählt, dass man auf dieser Basis entscheiden können sollte, ob die obigen Sätze einen klaren Wahrheitswert haben können. Ich hoffe also, wir sind uns alle klar darüber, was ein Känguru ist, ohne dass ich es definiere, und dass wir uns einig sind, dass kein Känguru Flügel hat, auch wenn dieser Wahrheitswert streng genommen unbekannt sein könnte, denn obwohl wir bisher ausschließlich flügellose Kängurus gesehen haben, könnte ja eines mit Flügeln existieren. Ich gehe also implizit davon aus, dass nach Ihrem Verständnis, Kängurus keine Flügel haben können. Außerdem gehe ich davon aus, dass sie „Morgen" als den Tag nach dem, an dem Sie diese Aufgabe bearbeiten, verstehen und wir hier keine Temporallogik benötigen, um Zeitabläufe erfassen zu können.

Der Mehrwert dieser Aufgabe ist, dass genau diese Unklarheit der Umgangssprache hier nochmal am eigenen Leib erfahren werden kann.

(i) Der Satz „Alle Kängurus haben Flügel." ist eine **Aussage**, denn alle Komponenten des Satzes (Kängurus, Flügel) sind im Rahmen des Allgemeinverständnisses ausreichend konkret definiert. Die Aussage ist falsch, denn es gibt mindestens ein Känguru ohne Flügel. (0.5 Punkte)

(ii) Der Satz „Grün ist die schönste Farbe." ist **keine Aussage**, denn welche Farbe die schönste ist, ist subjektiv und nicht allgemein gültig. Der Satz „Grün ist Georg's Lieblingsfarbe" ist hingegen eine Aussage, wenn klar ist, welcher Georg gemeint ist. (0.5 Punkte)

(iii) Der Satz „Morgen wird es in Mannheim geregnet haben." ist **eine Aussage**, denn alle Komponenten des Satzes (der Tag nach dem, an dem Sie diese Aufgabe bearbeiten, Mannheim, Regen) sind im Rahmen des Allgemeinverständnisses ausreichend konkret definiert. Der Wahrheitswert dieser Aussage ist derzeit niemandem bekannt, denn er hängt von einem zukünftigen Ereignis ab. (0.5 Punkte)

(iv) Der Satz „Hoffentlich schneit es diesen Winter viel." ist **keine Aussage**. Alle Komponenten sind ausreichend konkret definiert (wenn wir uns darauf einigen, dass der Winter 23/24 gemeint ist), eine geäußerte Hoffnung kann aber keinen Wahrheitswert annehmen und ist zusätzlich subjektiv. Der Satz „Georg hofft, dass es diesen Winter viel schneit." ist hingegen eine Aussage, wenn klar ist, welcher Georg gemeint ist und um welchen Ort es geht. (0.5 Punkte)

(v) Der Satz „Lichtjahre sind keine Zeiteinheit." ist **eine Aussage**, denn alle Komponenten des Satzes (Lichtjahre, Zeit) sind im Rahmen des Allgemeinverständnisses ausreichend konkret definiert. Die Aussage ist wahr, denn Lichtjahre sind eine Einheit für räumliche Maße. (0.5 Punkte)

(vi) Der Satz „Geh jetzt ins Bett!" ist eine Anweisung, die keinen Wahrheitswert haben kann, und damit **keine Aussage**. (0.5 Punkte)

Hausaufgabe 1.2 (Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache) 3 Punkte

Verwenden Sie die in Definition 1.3 des Skripts definierten Junktoren, um die unten stehenden Aussagen zu symbolisieren.

Hinweis: Weitere Beispiele dafür finden sich in Beispiel 1.4 des Skripts.

(i) Trotz der Kälte des Winters ist er die schönste Jahreszeit.

(ii) Sind sie zu stark, bist du zu schwach.

(iii) Wir sehen gerade entweder einen Sonnenaufgang oder einen Sonnenuntergang.

(iv) Ist Wasser bei über 100°C nicht dampfförmig, dann steht es unter Druck.

(v) Ausschließlich eine Woche vor Silvester ist Heiligabend.

(vi) Niemals „nein" zu sagen heißt nicht, immer „ja" zu sagen.

Lösung.

(i) Trotz der Kälte des Winters ist er die schönste Jahreszeit.

K: Der Winter ist kalt.
S: Der Winter ist die schönste Jahreszeit.

- $K \wedge S$ (0.5 Punkte)

Das „trotz" hat in diesem Satz eine wertende Funktion, die in der Logik nicht abgebildet wird.

(ii) Sind sie zu stark, bist du zu schwach.

S: Sie sind zu stark.
W: Du bist zu schwach.

- $S \longrightarrow W$ (0.5 Punkte)

Hier muss man die Konjunktion/die Wörter „wenn...dann" aus dem Satzbau folgern.

(iii) Wir sehen gerade entweder einen Sonnenaufgang oder einen Sonnenuntergang.

A: Wir sehen gerade einen Sonnenaufgang.
U: Wir sehen gerade einen Sonnenuntergang.

- $(A \wedge \neg U) \vee (\neg A \wedge U)$ (0.5 Punkte)

Das „entweder - oder“ zeigt das ausschließende XOR an.

(*iv*) Ist Wasser bei über 100°C nicht dampfförmig, dann steht es unter Druck.

H: Wasser hat über 100°C.
D: Wasser ist dampfförmig.
P: Wasser steht unter Druck.

- $H \wedge \neg D \rightarrow P$ (0.5 Punkte)

Hier muss man wieder das Konditional/das Wort „wenn“ aus dem Satzbau folgern.

(*v*) Ausschließlich eine Woche vor Silvester ist Heiligabend.

S: Es ist eine Woche vor Silvester.
H: Es ist Heiligabend.

- $S \leftrightarrow H$ (0.5 Punkte)

„Ausschließlich“ markiert hier das Bikonditional.

(*vi*) Niemals „nein“ zu sagen heißt nicht, immer „ja“ zu sagen.

N: Niemals „nein“ sagen.
J: Immer „ja“ sagen.

- $\neg(N \rightarrow J)$
- $N \nrightarrow J$ (0.5 Punkte)

Hausaufgabe 1.3 (Junktoren und Wahrheitstafeln) 2 Punkte

Es seien A und B Aussagen. Beweisen Sie Lemma 1.5 Aussage (*ii*) aus dem Skript, also dass die folgenden Aussagen dieselben Wahrheitstafeln haben:

a) $A \leftrightarrow B$ b) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Lösung.

Die Wahrheitstafeln ergeben sich zu

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F
F	W	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W

womit der Nachweis geführt ist, da die dritte Spalte und die letzte Spalte die gleichen Wahrheitsbelegung haben. (2 Punkte)

Hausaufgabe 1.4 (Assoziativität in zusammengesetzten Aussagen) 5 Punkte

(i) Es seien A_i für $i = 1, \dots, 8$ Aussagen. Setzen Sie in der folgenden zusammengesetzten Aussage alle Klammern, die auf Grund der Bindungsregeln (Ausdruck (1.1) des Skripts) weggelassen werden konnten.

$$A_1 \vee \neg A_2 \ \wedge A_3 \rightarrow \neg A_4 \wedge A_5 \leftrightarrow \neg\neg A_6 \rightarrow A_7 \vee A_8$$

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie die Assoziativität der Junktoren „$\rightarrow$“ sowie „$\leftrightarrow$“.

Lösung.

(i) Wir wenden die Bindungsregeln

$$\neg \text{ bindet stärker als } \wedge \text{ bindet stärker als } \vee \text{ bindet stärker als } \rightarrow \text{ bindet stärker als } \leftrightarrow \quad (1.1)$$

an und arbeiten uns dabei schrittweise von den am stärksten bindenden Junktoren (von innen) zu den am schwächsten bindenden (nach außen) vor. Da die Klammersetzung logisch äquivalente Ausdrücke liefert entsteht dabei die folgende Kette äquivalenter Aussagen:

$$\begin{aligned}
& A_1 \vee \neg A_2 \wedge A_3 \rightarrow \neg A_4 \wedge A_5 \leftrightarrow \neg\neg A_6 \rightarrow A_7 \vee A_8 \\
\Leftrightarrow\ & A_1 \vee (\neg A_2) \wedge A_3 \rightarrow (\neg A_4) \wedge A_5 \leftrightarrow (\neg(\neg A_6)) \rightarrow A_7 \vee A_8 && \text{(Klammern für } \neg) \\
\Leftrightarrow\ & A_1 \vee ((\neg A_2) \wedge A_3) \rightarrow ((\neg A_4) \wedge A_5) \leftrightarrow (\neg(\neg A_6)) \rightarrow A_7 \vee A_8 && \text{(Klammern für } \wedge) \\
\Leftrightarrow\ & \big(A_1 \vee ((\neg A_2) \wedge A_3)\big) \rightarrow ((\neg A_4) \wedge A_5) \leftrightarrow (\neg(\neg A_6)) \rightarrow (A_7 \vee A_8) && \text{(Klammern für } \vee)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\Big[\Big(A_1 \vee ((\neg A_2)\ \wedge A_3)\Big) \to ((\neg A_4) \wedge A_5)\Big] \leftrightarrow \Big[(\neg(\neg A_6)) \to (A_7 \vee A_8)\Big] \quad \text{(Klammern für } \to\text{)}$$

Wir könnten jetzt noch ein finales Klammerpaar um den ganzen Ausdruck setzen, das dann zu dem zentralen $\leftrightarrow$ gehört, aber keinen Mehrwert bringt. (2 Punkte)

(ii) Wir zeigen, dass $\to$ nicht assoziativ ist, indem wir zeigen, dass die Aussagen $((A \to B) \to C)$ und $(A \to (B \to C))$ nicht die gleichen Wahrheitstafeln haben.

Das ist übrigens das Gleiche, wie zu zeigen, dass die logische Nichtäquivalenz

$$(A \to B) \to C \not\Leftrightarrow A \to (B \to C)$$

gilt, also zu zeigen, dass

$$((A \to B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))$$

keine Tautologie ist.

Die Wahrheitstafel ergibt sich als:

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \to C$	$A \to (B \to C)$	$((A \to B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F	W
W	F	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W	F
F	F	W	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	F	W	F

(1.5 Punkte)

Der Junktor „$\leftrightarrow$“ ist hingegen assoziativ, das heißt dass $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$ und $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$ die gleiche Wahrheitstafeln haben und daher

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

gilt, also dass

$$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$$

eine Tautologie ist.

Die Wahrheitstafel ergibt sich als:

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$B \leftrightarrow C$	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$	$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F	W
W	F	W	F	F	F	F	W
W	F	F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	F	F	W
F	W	F	F	F	W	W	W
F	F	W	W	F	W	W	W
F	F	F	W	W	F	F	W

(1.5 Punkte)

Hausaufgabe 1.5 (Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache mit Quantoren) 2 Punkte

Symbolisieren Sie die unten stehenden Aussagen mithilfe der Aussageformen

$$A(x) : x \text{ ist Arbeitnehmer}$$
$$K(x, y) : x \text{ kennt } y$$
$$S(x, y) : x \text{ arbeitet für } y$$

für die nichtleere Grundmenge P aller Personen. Arbeitgeber sind Personen, für die jemand arbeitet.

(i) Wer für niemanden arbeitet, ist kein Arbeitnehmer.

(ii) Jeder Arbeitnehmer kennt jemanden, für den jemand arbeitet.

(iii) Nicht alle Arbeitnehmer, die sich kennen, arbeiten für einen gleichen Arbeitgeber.

(iv) Es gibt genau einen Arbeitgeber, der keinen seiner Arbeitnehmer kennt.

Lösung.

Beachte: Für die obigen Aussagen sind abhängig von der Verwendung von Negationen und Vertauschen von Existenz- und Allquantor auch andere Lösungen denkbar, siehe Satz 2.2.

(i) Die Aussage „Wer für niemanden arbeitet, ist kein Arbeitnehmer.“ ist zu interpretieren als „Für alle Personen ist für alle Personen nicht zu arbeiten hinreichend dafür, nicht Arbeitnehmer zu sein.“ und damit zu:

$$\forall x \in P \left((\forall y \in P\, (\neg S(x, y))) \to \neg A(x) \right) \text{ (0.5 Punkte)}$$

(ii) „Jeder Arbeitnehmer kennt jemanden, für den jemand arbeitet." kann wie im ersten Beispiel beschrieben werden als:

$$\forall x \in P \left(A(x) \to \exists y \in P \, \exists z \in P \, (K(x, y) \wedge S(z, y)) \right) \text{ (0.5 Punkte)}$$

(iii) „Nicht alle Arbeitnehmer, die sich kennen, arbeiten für einen gleichen Arbeitgeber." kann wie im ersten Beispiel beschrieben werden als:

$$\neg \Big(\big(\forall x \in P \, \forall y \in P \, (A(x) \wedge A(y) \wedge K(x, y)\big) \to (\exists z \in P \, (S(x, z) \wedge S(y, z)))) \Big) \text{ (0.5 Punkte)}$$

Dabei haben wir der Übersicht zuliebe noch darauf verzichtet, z auch noch als Arbeitgeber zu charakterisieren, also nicht noch zusätzlich zu fordern $\exists v \in P \, S(v, z)$, da das den Wahrheitswert der Aussage, die z charakterisiert, nicht ändert.

Negiert man diese Aussage, dann ergibt sich (unter Nutzung von $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$) die logisch äquivalente Aussage

$$\exists x \in P \, \exists y \in P \, \forall z \in P \, \big(A(x) \wedge A(y) \wedge K(x, y) \wedge \neg(S(x, z) \wedge S(y, z))\big)$$

(iv) „Es gibt genau einen Arbeitgeber, der keinen seiner Arbeitnehmer kennt." kann wie im ersten Beispiel beschrieben werden als:

$$\exists! y \in P \Big(\big(\exists x \in P \, (S(x, y))\big) \wedge \big(\forall x \, (A(x) \wedge S(x, y) \to \neg K(x, y))\big) \Big) \text{ (0.5 Punkte)}$$

Hausaufgabe 1.6 (Negation von Aussagen mit Quantoren) 4 Punkte

Gegeben sei ein Grundbereich X und Aussageformen $A(x), B(x, y), C(x, y, z)$ für $x, y, z \in X$. Negieren Sie die folgenden Aussagen und vereinfachen Sie die resultierenden Aussagen soweit wie möglich.

a) $\exists x \, \forall y \, (A(x) \wedge B(x, y))$

b) $\forall y \, \exists x \, (A(x) \vee B(x, y))$

c) $\forall x, \, \forall y \, (A(x) \to B(x, y))$

d) $\forall x \, \exists y \, \forall z \, ((C(x, y, z) \vee A(z)) \wedge B(x, y))$

Lösung.

Die Regeln für die Vertauschung von Negation und Existenz- und Allquantor finden sich in Satz 2.2. Wir negieren die jeweiligen Aussagen der Teilaufgaben und tauschen dann unter Beachtung der Regeln sukzessive die Negation weiter nach rechts in die Aussage, soweit dies möglich ist. Am Ende kann man z. B. mit den De Morganschen Gesetzen die Negation in den Aussagen „aufteilen". Da jede Anwendung der Negationsregeln eine äquivalente Aussage zur vorherigen Aussage ergibt, ergeben sich als Lösungen Ketten von äquivalenten Aussagen.

(i) Es ist

$$\begin{aligned}\neg\left(\exists x\,\forall y\,\big(A(x)\wedge B(x,y)\big)\right) &\Leftrightarrow \forall x \neg\left(\forall y\,\big(A(x)\wedge B(x,y)\big)\right)\\ &\Leftrightarrow \forall x\,\exists y\,\neg\big(A(x)\wedge B(x,y)\big)\\ &\Leftrightarrow \forall x\,\exists y\,\big(\neg A(x)\vee\neg B(x,y)\big).\end{aligned}$$

(1 Punkt) (Rot markiert ist in diesem Beispiel die Negation, die immer weiter nach Rechts mit den Quantoren vertauscht zu den Aussagen wandert.)

(ii) Es ist

$$\begin{aligned}\neg\left(\forall y\,\exists x\,\big(A(x)\vee B(x,y)\big)\right) &\Leftrightarrow \exists y \neg\left(\exists x\,\big(A(x)\vee B(x,y)\big)\right)\\ &\Leftrightarrow \exists y\forall x\neg\big(A(x)\vee B(x,y)\big)\\ &\Leftrightarrow \exists y\forall x\big(\neg A(x)\wedge\neg B(x,y)\big).\end{aligned}$$

(1 Punkt) (Rot markiert sind in diesem Beispiel jeweils die Terme, die sich in der letzten Äquivalenzumformung geändert haben.)

(iii) Es ist

$$\begin{aligned}\neg\left(\forall x\,\forall y\,\big(A(x)\longrightarrow B(x,y)\big)\right) &\Leftrightarrow \exists x\,\exists y\,\neg\big(A(x)\longrightarrow B(x,y)\big)\\ &\Leftrightarrow \exists x\,\exists y\,\big(A(x)\nrightarrow B(x,y)\big).\end{aligned}$$

(1 Punkt) (Rot markiert sind in diesem Beispiel jeweils die Terme, die sich in der letzten Äquivalenzumformung geändert haben. Die Negation der Allquantoren wurde hier in einem Schritt durchgeführt.)

(iv) Es ist

$$\begin{aligned}\neg\left(\forall x\,\exists y\,\forall z\,\big((C(x,y,z)\vee A(z))\wedge B(x,y)\big)\right) &\Leftrightarrow \exists x\,\neg\left(\exists y\,\forall z\,\big((C(x,y,z)\vee A(z))\wedge B(x,y)\big)\right)\\ &\Leftrightarrow \exists x\,\forall y\,\neg\left(\forall z\,\big((C(x,y,z)\vee A(z))\wedge B(x,y)\big)\right)\\ &\Leftrightarrow \exists x\,\forall y\,\exists z\,\neg\big((C(x,y,z)\vee A(z))\wedge B(x,y)\big)\\ &\Leftrightarrow \exists x\,\forall y\,\exists z\,\big(\neg(C(x,y,z)\vee A(z))\vee\neg B(x,y)\big)\\ &\Leftrightarrow \exists x\,\forall y\,\exists z\,\big(\neg C(x,y,z)\wedge\neg A(z)\vee\neg B(x,y)\big).\end{aligned}$$

(1 Punkt)

(Rot markiert sind in diesem Beispiel jeweils die Terme, die sich in der letzten Äquivalenzumformung geändert haben. Im letzten Term im letzten Schritt konnten die Klammern auf Grund der Bindungsregeln weggelassen werden.)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.