Anmerkungen zu diesem Dokument:

Für die Vorbereitung auf die von uns im WS 23/24 angebotenen Abschlussprüfungen möchten wir Ihnen gern zusätzliches Material zur Verfügung stellen. Unten stehend finden Sie zu diesem Zweck einige Aufgaben, deren Bearbeitung Sie in Ihre Vorbereitung einbeziehen können.

Bei der Verwendung dieses Materials muss Ihnen klar sein, dass es nicht möglich ist, Vorbereitungsmaterial zusammen zu stellen, das hinsichtlich Umfang und Schwierigkeitsgrad für jede/n von Ihnen mit den gewerteten Klausuren übereinstimmt. Ziehen Sie Rückschlüsse auf die gewerteten Klausuren an Hand dieses Dokument vorsichtig und seien Sie nicht überrascht, wenn sich dieses Dokument Ihrer Meinung nach in irgendeiner Komponente (Umfang, Schwierigkeit, Themenauswahl…) deutlich von den gewerteten Klausuren unterscheiden. Die unten stehenden Aufgaben geben vor allem Aufschluss darüber, wie typische Klausuraufgaben sich im *Stil* von den Übungsaufgaben unterscheiden, die Sie das Semester über bearbeitet haben.

Ansonsten gilt Folgendes:

- Das Layout dieses Dokuments entspricht ab der nächsten Seite im Wesentlichen dem derzeitigen Layout der Klausuren. Seite 2 dieses Dokuments ist die Titelseite und die folgenden Seiten gehören immer nebeneinander.

- Auch in den Klausuren wird es 30 Wahr/Falsch-Fragen geben. Das Bewertungsschema des Wahr/Falsch-Fragenteils wird voraussichtlich genau dem hier vorgelegten entsprechen. Die Gesamtpunktzahl von jeder der zwei gewerteten Klausuren wird 100 Punkte sein.

- Die „Musterlösungen“, die wir veröffentlichen werden, sind bewusst nur als Skizzen für die Selbstkontrolle formuliert. Sie entsprechen weder einer Optimallösung noch einer Minimallösung.

Klausurvorbereitung

5. Februar 2024

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	

- Die maximal zulässige Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein beliebig (evtl. doppelseitig) beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Bei Täuschungsversuchen wird Ihre Prüfung mit „nicht bestanden“ bewertet.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte stumm und entfernen Sie sie vom Platz.
- Legen Sie Ihren Lichtbildausweis vor sich an den Platz.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe.
- Begründen Sie Ihre Antworten, wenn nichts Gegenteiliges vermerkt ist!
- Verwenden Sie für Ihre Lösung den Platz hinter der jeweiligen Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Seiten (z. B. für Nebenrechnungen) finden Sie hinter der letzten Aufgabe.
- Sollten Sie weiteres Papier benötigen, dann heben Sie die Hand, wir bringen es Ihnen an den Platz. Schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen Teilaufgaben beliebiger Aufgaben unabhängig voneinander bearbeiten.

1 (30 P.)	2 (12 P.)	3 (10 P.)	4 (14 P.)	5 (14 P.)	6 (20 P.)	Σ (100 P.)

Aufgabe 1. (Wahr oder Falsch) 30 Punkte

Kreuzen Sie neben jeder der unten stehenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen, also ohne Einschränkung, wahr (W) oder falsch (F) ist. In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten *ausnahmsweise nicht begründen.*

Beachte: In dieser Aufgabe sind nur Kreuze als Markierungen zulässig. Jede korrekte Entscheidung liefert einen Punkt. Jede falsche Entscheidung liefert einen Punkt *Abzug*. Jede andere Konstellation von Kreuzen wird nicht gewertet. Die Summe der Punkte und Abzüge, mindestens aber Null, ist die erreichte Punktzahl zu dieser Aufgabe. Sollten Sie einen Kasten angekreuzt haben, der doch nicht als markiert gewertet werden soll, so färben Sie bitte den gesamten Kasten ein. Muster:

	W	F	
(1)	☒	☐	Hier wird die Entscheidung „wahr“ gewertet.
(2)	☐	☒	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(3)	■	☒	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(4)	■	☐	Wird nicht gewertet.
(5)	☒	☒	Wird nicht gewertet.
(6)	☐	☐	Wird nicht gewertet.

Gemischtes:

	W	F	
(1)	☐	☐	Die Äquivalenz einer wahren Aussage und einer falschen Aussage ist wahr.
(2)	☐	☐	Der Allquantor und der Existenzquantor kommutieren.
(3)	☐	☐	Sind A eine endliche und B eine unendliche Menge, dann ist $A \times B$ unendlich.
(4)	☐	☐	Nicht in jeder totalgeordneten Menge $(M, \leqslant)$ existiert ein minimales Element von M.
(5)	☐	☐	Es existiert eine symmetrische und antisymmetrische Relation.
(6)	☐	☐	Jede linkseindeutige Funktion ist bijektiv.

Zu (Halb-)Gruppen:

	W	F	
(7)	☐	☐	Es gibt einen Monoid mit genau drei verschiedenen neutralen Elementen.
(8)	☐	☐	In Gruppen ist die Linkstranslation mit einem beliebigen Element rechtstotal.
(9)	☐	☐	In Gruppen stimmt nur das neutrale Element mit seinem Quadrat überein.
(10)	☐	☐	Jede Gruppe wird von einer ihrer Untergruppen erzeugt.
(11)	☐	☐	Keine Faktorgruppe ist gleichmächtig zu ihrer Ursprungsgruppe.
(12)	☐	☐	Gruppen gleicher Primzahlkardinalität sind isomorph.

Zu Ringen, Körpern und Polynomen:

	W	F	
(13)	☐	☐	Jeder Ring hat mindestens zwei verschiedene Elemente.
(14)	☐	☐	In kommutativen Ringen ist jeder Linksnullteiler auch Rechtsnullteiler.
(15)	☐	☐	Jeder Ringautomorphismus ist bijektiv.
(16)	☐	☐	Es gibt einen Körper der Charakteristik Eins.
(17)	☐	☐	Ist $R[t]$ ein Polynomring, dann ist sein Koeffizientenring isomorph zu einem seiner Unterringe.
(18)	☐	☐	Ist p ein Polynom über einem kommutativen Ring, dann hat jedes Monom genau eine Nullstelle.

Zu Vektorräumen:

	W	F	
(19)	☐	☐	Ist V ein Vektorraum, dann beschränkt seine Dimension die Dimension jedes seiner Unterräume nach oben.
(20)	☐	☐	Jeder Vektorraum beinhaltet einen echten Unterraum.
(21)	☐	☐	Jede Teilmenge eines Vektorraums kann zu einer Basis erweitert werden.
(22)	☐	☐	Die lineare Hülle jeder linear abhängigen Menge ist linear abhängig.
(23)	☐	☐	Zwischen je zwei Vektorräumen über einem gemeinsamen Körper existiert eine lineare Abbildung.
(24)	☐	☐	Ist V ein Vektorraum, dann stimmt die Dimension jedes seiner Faktorräume mit der Dimension von V überein.

Zu Matrizen, Vektorraumhomomorphismen und linearen Gleichungssystemen:

	W	F	
(25)	☐	☐	Für jede Matrix stimmen ihr Spalten- und ihr Zeilenraum überein.
(26)	☐	☐	Jede symmetrische Matrix ist quadratisch.
(27)	☐	☐	Ist K ein Körper, dann ist der Ring quadratischer 3×3 Matrizen über K nullteilerfrei.
(28)	☐	☐	Es gibt ein reelles lineares Gleichungssystem mit genau zwei Lösungen.
(29)	☐	☐	Jede Matrix ist Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung.
(30)	☐	☐	Ist V ein Vektorraum mit zwei verschiedenen Basen B_1, B_2, dann ist der Nullvektor der einzige Vektor, dessen Koordinantendarstellungen bzgl. B_1 und B_2 übereinstimmen.

Aufgabe 2. $2 + 2 + 2 + 4 + 2 = 12$ Punkte

Es seien X eine nichtleere Menge und $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Wir definieren die Relation $\sim$ auf X durch

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; f(x) = f(y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass $F\colon \{[x]_\sim \mid x \in X\} \ni [x]_\sim \mapsto f(x) \in X$ eine injektive Abbildung ist.

(c) Bestimmen Sie die Kardinalität von $[x]_\sim$ für beliebige $x \in X$ in dem Fall, dass f injektiv ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\{[f(x)]_\sim \mid x \in X\}$ eine Partition von X ist, wenn f injektiv und X endlich ist.

(e) Geben Sie ein Beispiel für X und f an, das zeigt, dass die Aussage aus Teilaufgabe (d) i. A. (also wenn nicht zusätzlich Injektivität und Endlichkeit vorausgesetzt sind) nicht gilt.

Lösung.

Aufgabe 3. 5 + 5 = 10 Punkte

(a) Es seien $(G, \star)$ und $(H, \square)$ Gruppen sowie $f : (G, \star) \to (H, \square)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(f(a)) \leqslant \operatorname{ord}(a)$ für alle $a \in G$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass nur der triviale Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$ existiert.

Lösung.

Aufgabe 4. 9 + 5 = 14 Punkte

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe sowie H eine Menge und $f\colon G \to H$ eine Bijektion. Weiterhin sei

$$\square\colon H \times H \to H \qquad h_1 \mathbin{\square} h_2 \coloneqq f\big(f^{-1}(h_1) \star f^{-1}(h_2)\big).$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein Gruppenisomorphismus zwischen $(G, \star)$ und $(H, \square)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(G, \star)$ genau dann abelsch ist, wenn $(H, \square)$ abelsch ist.

Lösung.

Aufgabe 5. 7 + 7 = 14 Punkte

Gegeben seien die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix $A_a \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Vektor $b_a \in \mathbb{R}^3$ der Form

$$A_a \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & a^2 - 22 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_a \coloneqq \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Dimension und die Kodimension von $\mathcal{L}(A_a, 0)$ in Abhängigkeit von a.

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{L}(A_a, b_a)$ für diejenigen a, für welche $\mathcal{L}(A_a, b_a)$ unendlich ist.

Lösung.

Aufgabe 6. 2 + 3 + 4 + 3 + 4 + 4 = 20 Punkte

Es sei $V := \mathbb{R}^{[\![1,6]\!]}$ der Vektorraum der Funktionen von $[\![1,6]\!]$ nach $\mathbb{R}$ mit den punktweisen Verknüpfungen über den reellen Zahlen. Weiter sei die Familie von Mengen (X_1, X_2, X_3) gegeben, wobei

$$X_1 := \{1\}, \qquad X_2 := \{2,4,6\}, \qquad X_3 := \{3,5\}.$$

(a) Zeigen Sie mittels des Unterraumkriteriums, dass die Menge

$$U := \{u \in V \mid u(x) = u(y) \text{ für alle } x, y \in X_i \text{ und für alle } i = 1, \dots, 3\}$$

ein Unterraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass $B_U := (u_1, u_2, u_3) \subseteq U$ mit

$$u_i(x) := \begin{cases} 1, & x \in X_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } i = 1,2,3$$

eine geordnete Basis von B_U ist und geben Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ an.

(c) Bestimmen Sie zu U einen V-komplementären Unterraum.

(d) Zeigen Sie, dass $\Phi\colon U \ni u \mapsto \Phi(u) \in \mathbb{R}^{\{X_1,X_2,X_3\}}$ mit

$$\Phi(u)(X) := (\#X) \cdot u(x) \text{ für ein beliebiges } x \in X$$

ein Vektorraumhomomorphismus zwischen U und $(\mathbb{R}^{\{X_1,X_2,X_3\}}, +, \cdot)$ ist.

(e) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(\Phi)$ und $\operatorname{Bild}(\Phi)$, und entscheiden Sie, ob Φ ein Vektorraumisomorphismus ist.

(f) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{M}_E^{B_U}(\Phi)$ bezüglich B_U und der Standardbasis E der charakteristischen Funktionen von $(\mathbb{R}^{\{X_1,X_2,X_3\}}, +, \cdot)$.

Lösung.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Nebenrechnungen Seite 1.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Nebenrechnungen Seite 2.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Nebenrechnungen Seite 3.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern!

Nebenrechnungen Seite 4.