Klausurvorbereitung

5. Februar 2024

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	

- Die maximal zulässige Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein beliebig (evtl. doppelseitig) beschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Bei Täuschungsversuchen wird Ihre Prüfung mit „nicht bestanden" bewertet.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte stumm und entfernen Sie sie vom Platz.
- Legen Sie Ihren Lichtbildausweis vor sich an den Platz.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit roter Farbe.
- Begründen Sie Ihre Antworten, wenn nichts Gegenteiliges vermerkt ist!
- Verwenden Sie für Ihre Lösung den Platz hinter der jeweiligen Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Seiten (z. B. für Nebenrechnungen) finden Sie hinter der letzten Aufgabe.
- Sollten Sie weiteres Papier benötigen, dann heben Sie die Hand, wir bringen es Ihnen an den Platz. Schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Sie dürfen Teilaufgaben beliebiger Aufgaben unabhängig voneinander bearbeiten.

1 (30 P.)	2 (12 P.)	3 (10 P.)	4 (14 P.)	5 (14 P.)	6 (20 P.)	Σ (100 P.)

Aufgabe 1. (Wahr oder Falsch) 30 Punkte

Kreuzen Sie neben jeder der unten stehenden Aussagen an, ob sie im Allgemeinen, also ohne Einschränkung, wahr (W) oder falsch (F) ist. In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten *ausnahmsweise nicht begründen.*

Beachte: In dieser Aufgabe sind nur Kreuze als Markierungen zulässig. Jede korrekte Entscheidung liefert einen Punkt. Jede falsche Entscheidung liefert einen Punkt *Abzug*. Jede andere Konstellation von Kreuzen wird nicht gewertet. Die Summe der Punkte und Abzüge, mindestens aber Null, ist die erreichte Punktzahl zu dieser Aufgabe. Sollten Sie einen Kasten angekreuzt haben, der doch nicht als markiert gewertet werden soll, so färben Sie bitte den gesamten Kasten ein. Muster:

	W	F	
(1)	X		Hier wird die Entscheidung „wahr“ gewertet.
(2)		X	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(3)	■	X	Hier wird die Entscheidung „falsch“ gewertet.
(4)	■		Wird nicht gewertet.
(5)	X	X	Wird nicht gewertet.
(6)			Wird nicht gewertet.

Gemischtes:

	W	F	
(1)		X	Die Äquivalenz einer wahren Aussage und einer falschen Aussage ist wahr.
(2)		X	Der Allquantor und der Existenzquantor kommutieren.
(3)		X	Sind A eine endliche und B eine unendliche Menge, dann ist $A \times B$ unendlich.
(4)	X		Nicht in jeder totalgeordneten Menge $(M, \leqslant)$ existiert ein minimales Element von M.
(5)	X		Es existiert eine symmetrische und antisymmetrische Relation.
(6)		X	Jede linkseindeutige Funktion ist bijektiv.

Zu (Halb-)Gruppen:

	W	F	
(7)		X	Es gibt einen Monoid mit genau drei verschiedenen neutralen Elementen.
(8)	X		In Gruppen ist die Linkstranslation mit einem beliebigen Element rechtstotal.
(9)	X		In Gruppen stimmt nur das neutrale Element mit seinem Quadrat überein.
(10)	X		Jede Gruppe wird von einer ihrer Untergruppen erzeugt.
(11)		X	Keine Faktorgruppe ist gleichmächtig zu ihrer Ursprungsgruppe.
(12)	X		Gruppen gleicher Primzahlkardinalität sind isomorph.

Zu Ringen, Körpern und Polynomen:

	W	F	
(13)		X	Jeder Ring hat mindestens zwei verschiedene Elemente.
(14)	X		In kommutativen Ringen ist jeder Linksnullteiler auch Rechtsnullteiler.
(15)	X		Jeder Ringautomorphismus ist bijektiv.
(16)		X	Es gibt einen Körper der Charakteristik Eins.
(17)	X		Ist $R[t]$ ein Polynomring, dann ist sein Koeffizientenring isomorph zu einem seiner Unterringe.
(18)		X	Ist p ein Polynom über einem kommutativen Ring, dann hat jedes Monom genau eine Nullstelle.

Zu Vektorräumen:

	W	F	
(19)	X		Ist V ein Vektorraum, dann beschränkt seine Dimension die Dimension jedes seiner Unterräume nach oben.
(20)		X	Jeder Vektorraum beinhaltet einen echten Unterraum.
(21)		X	Jede Teilmenge eines Vektorraums kann zu einer Basis erweitert werden.
(22)	X		Die lineare Hülle jeder linear abhängigen Menge ist linear abhängig.
(23)	X		Zwischen je zwei Vektorräumen über einem gemeinsamen Körper existiert eine lineare Abbildung.
(24)		X	Ist V ein Vektorraum, dann stimmt die Dimension jedes seiner Faktorräume mit der Dimension von V überein.

Zu Matrizen, Vektorraumhomomorphismen und linearen Gleichungssystemen:

	W	F	
(25)		X	Für jede Matrix stimmen ihr Spalten- und ihr Zeilenraum überein.
(26)	X		Jede symmetrische Matrix ist quadratisch.
(27)		X	Ist K ein Körper, dann ist der Ring quadratischer 3×3 Matrizen über K nullteilerfrei.
(28)		X	Es gibt ein reelles lineares Gleichungssystem mit genau zwei Lösungen.
(29)	X		Jede Matrix ist Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung.
(30)		X	Ist V ein Vektorraum mit zwei verschiedenen Basen B_1, B_2, dann ist der Nullvektor der einzige Vektor, dessen Koordinantendarstellungen bzgl. B_1 und B_2 übereinstimmen.

Lösung.

Jeweils einen Punkt pro Aussage möglich, also maximal (30 Punkte)

Die folgenden Erklärungen dienen der Selbstkontrolle und sind ausdrücklich nicht teil der geforderten Lösung.

(1) Ist falsch, nach Definition liefert der Äquivalenzjunktor für eine wahre und eine falsche Aussage den Wert „Falsch“.

(2) Ist falsch, denn im Allgemeinen kommutieren diese beiden Junktoren nicht. $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}(n >$

x) ist eine wahre Aussage, $\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} (n > x)$ ist falsch.

(3) Ist falsch, denn auch die leere Menge ist endlich, ist also $B = \emptyset$, dann ist $A \times B = \emptyset$ für beliebiges A und damit ebenfalls endlich.

(4) Ist wahr, die reellen Zahlen beispielsweise sind totalgeordnet, besitzen aber kein minimales Element.

(5) Ist wahr, es existiert genau eine je Menge, das ist die Identitätsrelation.

(6) Ist falsch, linkseindeutig bedeutet injektiv, dass es injektive Funktionen gibt, die nicht surjektiv sind ist offensichtlich.

(7) Ist falsch, denn in Halbgruppen sind neutrale Elemente eindeutig (Lemma 7.7).

(8) Ist wahr, denn in Gruppen sind Links- und Rechtstranslationen sowohl injektiv als auch surjektiv (also rechtstotal).

(9) Ist wahr, gilt $a^2 = a$ erhält man durch Kürzen sofort, dass $a = e$.

(10) Ist wahr, jede Gruppe ist eine Untergruppe Ihrer selbst.

(11) Ist falsch, in jeder Gruppe ist die Faktorgruppe bzgl. des trivialen Normalteilers offensichtlich isomorph und damit gleichmächtig zu ihrer Ursprungsgruppe.

(12) Ist wahr, denn Gruppen mit Primzahlkardinalität sind nach dem Satz von Lagrange zyklisch (von jedem nichtneutralen Element) erzeugt. Über die Potenzen jedes erzeugenden Elements erhält man eine entsprechende Bijektion.

(13) Ist falsch, denn der/ein Nullring hat nur ein Element.

(14) Ist wahr, eben weil jedes Produkt seinem kommutierten entspricht.

(15) Ist wahr, nach Definition.

(16) Ist falsch, denn das würde bedeuten, dass $1 = 0$ und das kann in Körpern nicht gelten, selbst in Ringen gilt das nur für einen einzigen Ring (mit Eins).

(17) Ist wahr, der Koeffizientenring ist isomorph zum Ring der konstanten Polynome.

(18) Ist falsch, die Null ist immer eine Nullstelle der Monome aber in den Restklassenringen gibt es offensichtlich Elemente mit endlicher multiplikativer Ordnung, z. B. $2^3 = 0$ in der modulo 8 Arithmetik.

(19) Ist wahr, sonst ist die Teilmengeneigenschaft verletzt.

(20) Ist falsch, denn der Nullvektorraum ist der „kleinste“ Vektorraum, der existiert (bezogen auf die Kardinalität).

(21) Ist falsch, denn linear abhängige Mengen bleiben bei Erweiterung linear abhängig.

(22) Ist wahr, siehe vorherige Antwort. Spätestens hier sollte man seine Antwort der vorherigen Frage überdenken, wenn diese „wahr" war.

(23) Ist wahr, das ist die Nullabbildung.

(24) Ist falsch, durch ausfaktorisieren des ganzen Raums kann man die Dimension immer auf 0 kriegen.

(25) Ist falsch, nur deren Dimensionen stimmen i. A. überein, siehe $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(26) Ist wahr, nichtquadratische Matrizen können $A = A^\mathsf{T}$ nicht erfüllen, da sich die Dimensionen ändern.

(27) Ist falsch, das Beispiel einer Matrix mit einer einzelnen 1 in der rechten oberen Ecke kennen wir aus dem Skript.

(28) Ist falsch, denn Lösungsmengen haben die Struktur affiner Unterräume und in dem gegebenen Setting haben alle Unterräume entweder genau ein Element oder überabzählbar viele.

(29) Ist wahr, zwischen den Standardvektorräumen passender Dimension mit den Standardbasen definiert jede Matrix eine lineare Abbildung und ihre eigene Darstellungsmatrix.

(30) Ist falsch, z. B. der erste Basisvektor der Basen $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ und $B_2 = \{(1, 0), (1, 1)\}$ des $\mathbb{R}_2$ hat bezüglich beider Basen die gleiche Darstellung (nämlich sich selbst).

Aufgabe 2. 2 + 2 + 2 + 4 + 2 = 12 Punkte

Es seien X eine nichtleere Menge und $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Wir definieren die Relation $\sim$ auf X durch

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; f(x) = f(y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass $F\colon \{[x]_\sim \mid x \in X\} \ni [x]_\sim \mapsto f(x) \in X$ eine injektive Abbildung ist.

(c) Bestimmen Sie die Kardinalität von $[x]_\sim$ für beliebige $x \in X$ in dem Fall, dass f injektiv ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\{[f(x)]_\sim \mid x \in X\}$ eine Partition von X ist, wenn f injektiv und X endlich ist.

(e) Geben Sie ein Beispiel für X und f an, das zeigt, dass die Aussage aus Teilaufgabe (d) i. A. (also wenn nicht zusätzlich Injektivität und Endlichkeit vorausgesetzt sind) nicht gilt.

Lösung.

Skizze für die Selbstkontrolle:

(a) Reflexivität ist offensichtlich, da jedes Element aus X auf genau einen Wert $f(x)$ in X abgebildet wird. Symmetrie und Transitivität übertragen sich auf Grund der Symmetrie und Transitivität der Gleichheitsbeziehung. (2 Punkte)

(b) Die Abbildung ist wohldefiniert, weil sie gerade nach Definition repräsentantenunabhängig ist. Sind $[x], [y]$ gegeben mit gleichem Wert unter F, dann ist $f(x) = f(y)$ und damit $x \sim y$ also $x \in [y]$ also $[x] = [y]$. (2 Punkte)

(c) Wenn f injektiv ist, dann bedeutet $f(x) = f(y)$ nach Definition auch $x = y$ und damit sind $[x] = \{x\}$ für $x \in X$ in diesem Fall Punktmengen und haben daher Kardinalität 1. (2 Punkte)

(d) Die Menge $\{[x] \mid x \in X\}$ bildet, wie jede auf diese Art von einer Äquivalenzrelation auf X induzierte Menge, eine Partition von X (Satz 5.19). D. h., dass $[x]$ für alle $x \in X$ nichtleer ist und die Mengen stimmen entweder überein oder sind disjunkt, das überträgt sich natürlich auch auf die Mengen $[f(x)]$ für alle $x \in X$, lediglich die Überdeckungseigenschaft ist noch zu zeigen, also dass für jedes $y \in X$ ein $x \in X$ existiert, so dass $y \in [f(x)]$ also $f(y) = f(f(x))$. Ist X endlich und f injektiv, dann ist f auch surjektiv. Für den Wert $y \in X$ existiert also ein Urbild $x \in X$ unter f, und dieses erfüllt genau die geforderte Bedingung. (4 Punkte)

(e) Ein Gegenbeispiel darf endliches X und injektives f nicht kombinieren. Ein Gegenbeispiel mit injektivem f ist beispielsweise die Menge $X = \mathbb{N}$ und die Abbildung $f(n) := n + 1$, denn hier ist $f(1) = 2 \notin f(f(\mathbb{N})) = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. (2 Punkte)

Aufgabe 3. 5 + 5 = 10 Punkte

(a) Es seien $(G, \star)$ und $(H, \square)$ Gruppen sowie $f\colon (G, \star) \longrightarrow (H, \square)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(f(a)) \leqslant \operatorname{ord}(a)$ für alle $a \in G$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass nur der triviale Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$ existiert.

Lösung.

Skizze zur Selbstkontrolle:

(a) Wir bezeichnen die neutralen Elemente von $(G, \star)$ und $(H, \square)$ mit e_G, respektive e_H. Für $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) = \infty$ gilt die Aussage trivialerweise. Wie für jeden Gruppenhomomorphismus ist $f(e_G) = e_H$ und damit (in multiplikativer Schreibweise) für jedes $a \in G$ mit endlicher Ordnung

$$e_H = f(e_G) = f(a^{\operatorname{ord} a}) = f(a)^{\operatorname{ord} a},$$

und damit $f(a)$ höchstens von Ordnung $\operatorname{ord}(a)$. (5 Punkte)

Beachte: Es werden aber nicht alle Elemente auf Elemente gleicher Ordnung abgebildet, das sieht man zum Beispiel am trivialen Homomorphismus zwischen beliebigen nichttrivialen Gruppen, der alle Elemente auf das neutrale Element (dessen Ordnung 0 ist) abbildet.

(b) Jedes nichtneutrale Element in $(\mathbb{Z}, +)$ hat Ordnung ∞. Jedes nichtneutrale Element in $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ hat aber endliche Ordnung, denn die Gruppe ist endlich. Jedes Element muss von einem Gruppenhomomorphismus also auf $0 \in \mathbb{Z}$ abgebildet werden. (5 Punkte)

Aufgabe 4. 9 + 5 = 14 Punkte

Es sei $(G, \star)$ eine Gruppe sowie H eine Menge und $f\colon G \to H$ eine Bijektion. Weiterhin sei

$$\square\colon H \times H \to H \qquad h_1 \square h_2 := f\big(f^{-1}(h_1) \star f^{-1}(h_2)\big).$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein Gruppenisomorphismus zwischen $(G, \star)$ und $(H, \square)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(G, \star)$ genau dann abelsch ist, wenn $(H, \square)$ abelsch ist.

Lösung.

Skizze zur Selbstkontrolle:

(a) Zuerst ist zu zeigen, dass $(H, \square)$ tatsächlich eine Gruppe ist. Per Definition ist $\square$ eine Verknüpfung auf H. Nun seien $h_1, h_2, h_3 \in H$. Dann ist

$$\begin{aligned}(h_1 \square h_2) \square h_3 &= f\left(f^{-1}(h_1) \star f^{-1}(h_2)\right) \square h_3 \\ &= f\left(f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(h_1) \star f^{-1}(h_2)\right)\right) \star f^{-1}(h_3)\right) \\ &= f\left(f^{-1}(h_1) \star f^{-1}(h_2) \star f^{-1}(h_3)\right) \\ &= f\left(f^{-1}(h_1) \star f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(h_2) \star f^{-1}(h_3)\right)\right)\right) \\ &= h_1 \square (h_2 \square h_3)\end{aligned}$$

und damit $\square$ auf H assoziativ, es liegt also eine Halbgruppe vor.

Das neutrale Element ist $e_H := f(e_G)$, denn für $h \in H$ ist

$$h \square e_H = f\left(f^{-1}(h) \star f^{-1}(f(e_G))\right) = f\left(f^{-1}(h) \star e_G\right) = h,$$

wobei die Linksneutralität von e_H analog aus der Linksneutralität von e_G folgt.

Zu einem $h \in H$ ist das inverse Element dann durch $f\left(f^{-1}(h)'\right)$ gegeben, denn

$$h \square f\left(f^{-1}(h)'\right) = f\left(f^{-1}(h) \star f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(h)'\right)\right)\right) = f\left(f^{-1}(h) \star f^{-1}(h)'\right) = f(e_G) = e_H.$$

Es verbleibt also nur noch die Isomorphismuseigenschaft von f nachzuweisen. Dabei ist die Bijektivität nach Voraussetzung gegeben und die Strukturverträglichkeit ist nach Konstruktion gegeben, denn für $g_1, g_2 \in G$ ist

$$f(g_1 \star g_2) = f\left(f^{-1}(f(g_1)) \star f^{-1}(f(g_2))\right) = f(g_1) \square f(g_2).$$

(9 Punkte)

(b) Ist $(G, \star)$ abelsch, dann gilt für $h_1, h_2 \in H$

$$h_1 \square h_2 = f(f^{-1}(h_1) \star f^{-1}(h_2)) = f(f^{-1}(h_2) \star f^{-1}(h_1)) = h_2 \square h_1.$$

Es sei nun $(H, \square)$ abelsch. Wegen der Isomorphismuseigenschaft von f wissen wir bereits, dass auch f^{-1} ein Isomorphismus von H nach G ist, daher ist

$$\begin{aligned}g_1 \star g_2 &= f^{-1}(f(g_1)) \star f^{-1}(f(g_2)) = f^{-1}\left(f(g_1) \square f(g_2)\right) \\ &= f^{-1}\left(f(g_2) \square f(g_1)\right) = f^{-1}(f(g_2)) \star f^{-1}(f(g_1)) = g_2 \star g_1,\end{aligned}$$

für $g_1, g_2 \in G$. (5 Punkte)

Aufgabe 5. 7 + 7 = 14 Punkte

Gegeben seien die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix $A_a \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Vektor $b_a \in \mathbb{R}^3$ der Form

$$A_a := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & a^2 - 22 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b_a := \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Dimension und die Kodimension von $\mathcal{L}(A_a, 0)$ in Abhängigkeit von a.

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{L}(A_a, b_a)$ für diejenigen a, für welche $\mathcal{L}(A_a, b_a)$ unendlich ist.

Lösung.

Skizze zur Selbstkontrolle:

(a) Wir erhalten die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & a^2 - 22 & a \end{array}\right]$$

und mit den Zwischenschritten ... (ausgelassen) die dazugehörige Zeilenstufenform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a - 4 \end{array}\right].$$

Die Fälle $a \notin \{-4, 4\}$ liefern eine Vollrangmatrix A_a, die ist also invertierbar und $\mathcal{L}(A_a, 0)$ ist damit der Nullraum mit Dimension 0. Für $a \in \{-4, 4\}$ hat die Matrix A_a Rang 2, damit ergibt sich die Dimension von $\mathcal{L}(A_a, 0)$ zu $3 - 2 = 1$. Die Kodimension ergibt sich aus dem Dimensionssatz für Faktorräume zu $3 - 0 = 3$ bzw. $3 - 1 = 2$. (7 Punkte)

(b) Die erweiterte Matrix $[A_a|b_a]$ hat nur für $a = 4$ Rang 2 und entspricht einem lösbaren System, im Fall $a = -4$ ist das System nicht lösbar, die Lösungsmenge also leer.

Im Fall $a = 4$ wissen wir, dass $\mathcal{L}(A_a, b_a)$ ein affiner Unterraum mit zugehöriger Dimension des Unterraums 1 ist, hier gibt es also unendlich viele Lösungen, daher müssen wir die Lösungsmenge bestimmen, also das System

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

fertig lösen, wo wir durch umskalieren der zweiten Zeile zu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

kommen und damit die homogene Lösungsmenge

$$\mathcal{L}(A, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

sodass wir mit einer Partiklärlösung erhalten, dass $\mathcal{L}(A, b) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. (7 Punkte)

Aufgabe 6. 2 + 3 + 4 + 3 + 4 + 4 = 20 Punkte

Es sei $V := \mathbb{R}^{[\![1,6]\!]}$ der Vektorraum der Funktionen von $[\![1,6]\!]$ nach $\mathbb{R}$ mit den punktweisen Verknüpfungen über den reellen Zahlen. Weiter sei die Familie von Mengen (X_1, X_2, X_3) gegeben, wobei

$$X_1 := \{1\}, \qquad X_2 := \{2,4,6\}, \qquad X_3 := \{3,5\}.$$

(a) Zeigen Sie mittels des Unterraumkriteriums, dass die Menge

$$U := \{u \in V \mid u(x) = u(y) \text{ für alle } x, y \in X_i \text{ und für alle } i = 1, \dots, 3\}$$

ein Unterraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass $B_U := (u_1, u_2, u_3) \subseteq U$ mit

$$u_i(x) := \begin{cases} 1, & x \in X_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } i = 1,2,3$$

eine geordnete Basis von B_U ist und geben Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ an.

(c) Bestimmen Sie zu U einen V-komplementären Unterraum.

(d) Zeigen Sie, dass $\Phi\colon U \ni u \mapsto \Phi(u) \in \mathbb{R}^{\{X_1,X_2,X_3\}}$ mit

$$\Phi(u)(X) := (\#X) \cdot u(x) \text{ für ein beliebiges } x \in X$$

ein Vektorraumhomomorphismus zwischen U und $(\mathbb{R}^{\{X_1,X_2,X_3\}}, +, \cdot)$ ist.

(e) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\Phi)$ und $\mathrm{Bild}(\Phi)$, und entscheiden Sie, ob Φ ein Vektorraumisomorphismus ist.

(f) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{M}_E^{B_U}(\Phi)$ bezüglich B_U und der Standardbasis E der charakteristischen Funktionen von $(\mathbb{R}^{\{X_1,X_2,X_3\}}, +, \cdot)$.

Lösung.

Skizze zur Selbstkontrolle:

(a) Die Nullfunktion ist konstant und damit konstant auf jedem der X_i, sie liegt also in U, die Menge ist also nichtleer. Sind $u_1, u_2 \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann ist für alle $x, y \in X_i$, $i = 1 \dots 3$

$$(u_1 + \alpha u_2)(x) = u_1(x) + \alpha u_2(x) = u_1(y) + \alpha u_2(y) = (u_1 + \alpha u_2)(y)$$

und U damit abgeschlossen unter den Vektorraumverknüpfungen. (2 Punkte)

(b) Geordnet ist die Familie offensichtlich auf Grund des Indexbereichs $[\![1,3]\!]$. Dass die Menge erzeugend ist, sieht man für beliebiges $f \in U$ an Hand der Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^{3} f(i) u_i,$$

welche auf Grund der konstanten Funktionswerte von f auf jedem der X_i gültig ist und auch eindeutig sein muss, wie man mit einem Widerspruch zeigen könnte. Der direkte Nachweis der linearen Unabhängigkeit folgt aus dem Ansatz

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0.$$

Durch Auswertung am Punkt 1 erhält man

$$0 = 0(1) = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)(1) = \alpha_1$$

und analog durch Auswerten an den Punkten 2 und 3 entsprechend $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ und damit die lineare Unabhängigkeit. Die Dimension liest man dann direkt an der Basis als 3 ab. (3 Punkte)

(c) U besteht gerade aus den Funktionen, die auf den X_i konstante Werte haben, wir können also die Basis B_U von U zu einer Basis erweitern, indem wir die fehlende „Flexibilität" innerhalb der X_i hinzufügen und die lineare Hülle der Erweiterung bilden, z. B. also

$$W := \langle e_4, e_6, e_5 \rangle.$$

Die Trivialschnitteigenschaft ist einfach zu zeigen, denn $w \in W \cap U$ ist konstant auf X_1, X_2 und X_3 und hat die Werte 0 an 1, 2 und 3, was die Werte auf ganz $[\![1, 6]\!]$ zu 0 festlegt. Die Summeneigenschaft folgt für $f \in V$ aus der Darstellung

$$f = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} f(i) u_i}_{u \in U} + \underbrace{(f(4) - f(2))e_4 + (f(6) - f(2))e_6 + (f(5) - f(3))e_5}_{w \in W}.$$

(4 Punkte)

(d) Die Abbildung ist tatsächlich wohldefiniert, weil ja jedes $u \in U$ gerade auf den X_i konstant ist, man kann also einen beliebigen Punkt $x \in X$ auswerten und erhält den gleichen Wert. Es bleibt die Linearität zu zeigen. Seien dafür u_1 und u_2 aus U und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist für $X \in \{X_1, X_2, X_3\}$ und beliebiges $x \in X$.

$$\Phi(u_1 + \alpha\, u_2)(X) = \#X(u_1(x) + \alpha\, u_2(x)) = \#X u_1(x) + \alpha\, \#X u_2(x) = \Phi(u_1)(X) + \alpha\, \Phi(u_2)(X).$$

(3 Punkte)

(e) Jedes $f \in \mathbb{R}^{\{X_1, X_2, X_3\}}$ hat das Urbild

$$\frac{f(X_1)}{\#X_1} u_1 + \frac{f(X_2)}{\#X_2} u_2 + \frac{f(X_3)}{\#X_3} u_3 \in U,$$

daher ist Φ surjektiv, also ist $\operatorname{Bild}(\Phi) = \mathbb{R}^{\{X_1, X_2, X_3\}}$ und auf Grund des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen muss der Kern trivial sein, womit tatsächlich ein Isomorphismus vorliegt. Alternativ zeigt man, dass der Kern trivial ist und zeigt dann analog zu oben mit dem Dimensionssatz die Surjektivität. (4 Punkte)

(f) Die Bilder $\Phi(u_i)$ bilden gerade $X \in \{X_1, X_2, X_3\}$ auf $\#X u_i(x) = \#X e_i(X)$ ab, also ist $\Phi(u_i) = \#X_i e_i$. Die Darstellungsmatrix mit den Bildern $\Phi(u_i)$ in den Spalten hat also die einfache Diagonalgestalt

$$\begin{bmatrix} \#X_1 & 0 & 0 \\ 0 & \#X_2 & 0 \\ 0 & 0 & \#X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(4 Punkte)