Übung 12

Ausgabedatum: 15. Januar 2024
Abgabedatum: 21. Januar 2024

Hausaufgabe 12.1 (Abg., konvexe Mengen sind Schnitt abg. Halbräume)

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe Menge. Zeigen Sie, dass

$$C = \bigcap \{H \subseteq \mathbb{R}^n \mid H \text{ ist abgeschlossener Halbraum mit } C \subseteq H\}.$$

Hausaufgabe 12.2

Beweisen Sie Satz 14.3 aus dem Skript, also die folgende Aussage:

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\partial f(x_0)$ abgeschlossen und konvex.

Hausaufgabe 12.3 (Das Subdifferential von Normen)

(i) Es sei $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm und $\|\cdot\|^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die dazugehörige duale Norm

$$\|s\|^* := \max\left\{\left|s^\top x\right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\| \le 1\right\}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\partial\|x_0\| = \left\{s \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|s\|^* \le 1 \text{ und } s^\top x_0 = \|x_0\|\right\}.$$

(ii) Nutzen Sie Aussage (i) um Beispiel 14.5 zu verifizieren, also um die folgenden Aussagen zu zeigen:

(a) Es gilt $s \in \partial\|x\|_1$ genau dann, wenn

$$s_i \in \begin{cases} \{-1\} & \text{falls } x_i < 0, \\ [-1,1] & \text{falls } x_i = 0, \\ \{1\} & \text{falls } x_i > 0 \end{cases}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$.

(b)

$$\partial\|x\|_2 = \begin{cases} \left\{\frac{x}{\|x\|_2}\right\}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_2 \leq 1\}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(c) Für $x \neq 0$ gilt

$$\partial f(x) = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{r} \|s\|_1 = 1,\ s_i \geq 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } x_i = \|x\|_\infty, \\ s_i \leq 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } -x_i = \|x\|_\infty, \\ \text{und } s_i = 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } |x_i| < \|x\|_\infty \end{array} \right\}$$

sowie

$$\partial f(0) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_1 \leq 1\}.$$

und

$$\partial\|0\|_\infty = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_1 \leq 1\}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die duale Norm der p-Norm für $p \in [1, \infty]$ die q-Norm für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.

Hausaufgabe 12.4 (Monotonie des Subdifferentials)

Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine konvexe Funktion und $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^n$

(i) Zeigen Sie, dass das Subdifferential ein (mengenwertiger) monotoner Operator ist, also dass

$$(s_1 - s_2)^\top (x_1 - x_2) \geq 0 \tag{0.1}$$

für alle $s_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$.

(ii) Zeigen Sie, dass Aussage (i) für strikt konvexes f und $x_1 \neq x_2$ mit echter Ungleichheit in (0.1) gilt.

(iii) Zeigen Sie für strikt konvexes f und $x_1, x_2 \in \operatorname{rel}\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ die Beziehung

$$\partial f(x_1) \cap \partial f(x_2) \neq \emptyset \iff x_1 = x_2.$$

https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/2023ws/lecture-grundlagen-der-optimierung