E. Herberg, M. Hashemi, V. Stein
Universität Heidelberg

Übung 11

Ausgabedatum: 9. Januar 2024
Abgabedatum: 14. Januar 2024

Hausaufgabe 11.1 (Relatives Inneres des Epigraphen)

Beweisen Sie Lemma 13.18 aus dem Skript.

Hausaufgabe 11.2 (Endlichdimensionale Version des Satzes von Krein-Milman)

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge. Zeigen Sie:

(i) Für jeden Punkt $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ existiert eine **eigentliche Stützhyperebene**, also eine Hyperebene $H(a, \beta)$, so dass

$$a^\top \widehat{x} = \beta \geq a^\top x \quad \text{für alle } x \in C \qquad \text{und} \qquad \beta > a^\top x \quad \text{für mindestens ein } x \in C.$$

(ii) Es sei $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ und $H(a, \beta)$ eine eigentliche Stützhyperebene zu C an $\widehat{x}$. Dann ist

$$\dim(H(a, \beta) \cap C) < \dim(C).$$

(iii) Es sei $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ und $H(a, \beta)$ eine Stützhyperebene zu C an $\widehat{x}$. Dann sind alle Extremalpunkte der nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Menge $C \cap H(a, \beta)$ auch Extremalpunkte von C.

und beweisen Sie damit eine endlichdimensionale Version des Satzes von Kreil-Milman:

(iv) Jede nichtleere, kompakte, konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte.

Hinweis: In Aussage (i) können Sie Satz 13.30 nutzen.

Hinweis: In Aussage (iv) können Sie induktiv über die Dimension der Menge C argumentieren.

Beachte: Aus Aussage (iv) folgt mit dem Satz 13.13 von Carathéodory sofort, dass jeder Punkt in C als die Konvexkombination von höchstens $\dim(C) + 1$ der Extremalpunkte von C dargestellt werden kann.

Hausaufgabe 11.3 (Hauptsatz der linearen Optimierung aus Sicht der konvexen Optimierung)

(i) Es seien $C \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, kompakte, konvexe Menge und $f\colon C \to \mathbb{R}$ eine stetige, konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion f ihr *Supremum* in einem Extremalpunkt von C annimmt.

(ii) Nutzen Sie Aussage (i), um Satz 6.17 Aussage (iii) für beschränkte Polyeder zu beweisen, also die folgende Aussage:

Es sei P ein beschränktes Polyeder. Besitzt das Problem

$$\text{Minimiere} \quad c^\intercal x \quad \text{über } x \in P$$

eine Lösung, so ist auch ein Extremalpunkt (einer Ecke) von P eine Lösung.

Hausaufgabe 11.4 (Randlage von Maximierern konvexer Funktionen.)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex. Zeigen Sie: Wenn f den Wert

$$\sup_{x \in \operatorname{dom} f} f(x)$$

in einem Punkt in $\operatorname{rel\,int}(\operatorname{dom} f)$ annimmt, dann ist f konstant auf $\operatorname{dom} f$.

https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/2023ws/lecture-grundlagen-der-optimierung