E. Herberg, M. Hashemi, V. Stein
Universität Heidelberg

Übung 10

Ausgabedatum: 18. Dezember 2023
Abgabedatum: 8. Januar 2024

Wir wünschen Ihnen frohe Feiertage.

Hausaufgabe 10.1 (Beispiele von Projektionsaufgaben)

(i) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung der orthogonalen Projektion auf einen affinen Unterraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Konvexität der Zielmenge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ in der Projektionsaufgabe (Beispiel 13.1) entscheidend für die Wohldefiniertheit der Aufgabe ist. Geben Sie dazu eine nichtleere, kompakte und nichtkonvexe Zielmenge C sowie einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ an, bei dem die gesamte Menge C Lösung der Projektionsaufgabe (13.1) für den Punkt p ist.

Hausaufgabe 10.2 (Dimension eines affinen Unterraums)

Beweisen Sie Lemma 13.7 aus dem Skript, also die folgenden Aussagen für einen affinen Unterraum $A \subset \mathbb{R}^n$.

(i) A besitzt genau dann eine affine Basis $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ aus $k+1$ Elementen mit $k \geq 0$, wenn $\dim A = k$ ist.

(ii) Ist $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ eine affine Basis von A, dann lässt sich jedes Element von A auf eindeutige Art und Weise aus $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ affinkombinieren. Genauer hat jedes $x \in A$ die Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, x_i$$

mit Koeffizienten $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)^\mathsf{T}$, die sich aus der eindeutigen Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ | & & | \\ x_0 & \cdots & x_k \\ | & & | \end{bmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ | \\ x \\ | \end{pmatrix}}_{=:b} \tag{$*$}$$

ergeben. Die Matrix $B \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(k+1)}$ hat Rang $k+1$. Daher ist $B^\mathsf{T} B$ regulär, und ($*$) kann äquivalent als

$$B^\mathsf{T} B\, \alpha = B^\mathsf{T} b$$

geschrieben werden.

Hausaufgabe 10.3 (Affine Hüllen von Summen und Summen von affinen Hüllen)

Welche Beziehung besteht zwischen $\operatorname{aff}(M_1 + M_2)$ und $\operatorname{aff}(M_1) + \operatorname{aff}(M_2)$ für beliebige Mengen $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Hausaufgabe 10.4 (Satz von Carathéodory)

Beweisen Sie den Satz 13.13 von Carathéodory, also die folgende Aussage:

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge der Dimension k und $x \in \operatorname{conv}(M)$ eine Konvexkombination der Punkte $x_0, \dots, x_m \in M$ mit $m \geq 0$. Dann ist x bereits eine Konvexkombination von höchstens $k+1$ dieser Punkte.

Hinweis: Nutzen Sie, dass die Punkte $x_0, \dots, x_m \in M$ im Falle von $m > k$ affin abhängig sind.

https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/2023ws/lecture-grundlagen-der-optimierung