Übung 9

Ausgabedatum: 11. Dezember 2023
Abgabedatum: 17. Dezember 2023

Hausaufgabe 9.1 (Jensensche Ungleichung)

Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ genau dann konvex ist, wenn für jede beliebige endliche Mengen von Punkten $\{x_1, \dots, x_k\} \in \mathbb{R}^n$ und beliebige $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^\intercal \in \mathbb{R}^k$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ und $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^\intercal \geq 0$

$$f\Big(\sum_{i=1}^k \alpha_i\, x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i\, f(x_i)$$

gilt.

Hausaufgabe 9.2 (Charakterisierung konvexer Funktionen mittels erster Ableitung)

Beweisen Sie die Aussage (a) des Satz 11.18 aus dem Skript.

Hausaufgabe 9.3 (Beispiele konvexer Funktionen)

Weisen Sie die Aussagen zur Konvexität der Funktionen in Beispiel 11.9 nach.

Hausaufgabe 9.4 (Schranke an den Abstand zum globalen Minimierer)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine eigentliche, μ-stark konvexe Funktion.

(i) Zeigen Sie, dass falls x^* ein globaler Minimierer von f über $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist

$$\|x - x^*\|^2 \leq \frac{2}{\mu} |f(x) - f(x^*)|.$$

(ii) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, das zeigt, dass Punkt (i) i. A. nicht gilt, wenn x^* kein globaler Minimierer von f ist.

https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/2023ws/lecture-grundlagen-der-optimierung