

ÜBUNG 8

Ausgabedatum: 4. Dezember 2023

Abgabedatum: 10. Dezember 2023

Hausaufgabe 8.1 (Operationen auf konvexen Mengen)

Beweisen Sie [Satz 11.3](#) aus dem Skript, also die folgenden Aussagen:

- (i) Es sei $\{C_j\}_{j \in J}$ eine beliebige Familie konvexer Mengen in \mathbb{R}^n . Dann ist $\bigcap_{j \in J} C_j$ konvex.
- (ii) Es seien $C_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ konvex, $i = 1, \dots, k$. Dann ist das kartesische Produkt $C_1 \times \dots \times C_k$ konvex in $\mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$.
- (iii) Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine (affin-)lineare Abbildung, also $f(x) = Ax + b$, und $C \subseteq \mathbb{R}^n$ und $D \subseteq \mathbb{R}^m$ konvexe Mengen. Dann sind das Bild $f(C) \subseteq \mathbb{R}^m$ und das Urbild $f^{-1}(D) \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex.
- (iv) Sind $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, dann sind

$$\beta C_1 = \{\beta x_1 \mid x_1 \in C_1\} \quad \text{für } \beta \in \mathbb{R}$$

sowie die **Minkowski-Summe**

$$C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$$

konvex.

Hausaufgabe 8.2 (Stabilität von Abgeschlossenheit unter Bildung der konvexen Hülle.)

Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, dann ist auch $\text{conv}(M)$ abgeschlossen.

Hausaufgabe 8.3 (Extremalpunkte konvexer Mengen)

Die Definition [Definition 6.12](#) eines Extrempunktes eines Polyeders können wir mit Hilfe der Beobachtungen in [Hausaufgabe 5.1](#) direkt auf allgemeinere konvexe Mengen erweitern.

Definition (Extrempunkte konvexer Mengen).

Ein Vektor x aus einer konvexen Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Extrempunkt** von C , wenn aus

$$x = \alpha y + (1 - \alpha) z$$

für $y, z \in C$ und $\alpha \in (0, 1)$ bereits $y = z$ folgt.

- (i) Bestimmen Sie, wieviele Extrempunkte die abgeschlossene Kreisscheibe

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}, \quad r > 0$$

besitzt.

- (ii) In [Hausaufgabe 5.1](#) haben wir gezeigt, dass für jede Ecke eines Polyeders (jeden Extrempunkt) eine lineare Funktion existiert, so dass die Ecke der eindeutige Minimierer der Funktion über dem Polyeder ist. Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass diese Aussage nicht für Extrempunkte beliebiger kompakter, konvexer Menge gilt.

- (iii) Es sei eine Menge von Punkten $V = \{x_1, \dots, x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Extrempunkte von $\text{conv}(V)$ in V liegen.

- (iv) Es sei eine konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x \in C \mid C \setminus \{x\} \text{ ist konvex}\}$ genau die Menge der Extrempunkte von C ist.

Hausaufgabe 8.4 (Operationen auf konvexen Funktionen)

Beweisen Sie Satz [11.16](#) aus der Vorlesung, also die folgenden Aussagen:

- (i) Sind $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex auf \mathbb{R}^n und $\beta_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, m$, dann ist die durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^m \beta_i f_i(x)$$

definierte Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex auf \mathbb{R}^n .

- (ii) Sind die Funktionen $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex auf \mathbb{R}^n für alle i aus irgendeiner Indexmenge I , dann ist die durch das punktweise Supremum

$$f(x) := \sup\{f_i(x) \mid i \in I\}$$

definierte Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex auf \mathbb{R}^n .

- (iii) Ist $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ affin-linear und $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex, so ist $(f \circ g): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex auf \mathbb{R}^n .
- (iv) Ist $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex und monoton wachsend, so ist $(f \circ g): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex.

<https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/2023ws/lecture-grundlagen-der-optimierung>