E. Herberg, M. Hashemi, V. Stein
Universität Heidelberg

Übung 7

Ausgabedatum: 27. November 2023
Abgabedatum: 3. Dezember 2023

Hausaufgabe 7.1 ((Un-)zulässige und (un-)beschränkte primal-duale Paare)

(i) Geben Sie ein primal-duales Paar von LPs an, in dem beide Probleme unzulässig sind (vgl. Satz 8.8, Fall (II)).

(ii) Geben Sie ein primal-duales Paar von LPs an, bei dem das primale zulässig und unbeschränkt und das duale Problem unzulässig ist (vgl. Satz 8.8, Fall (III)).

Hausaufgabe 7.2 (Nichtlinearer Einfluss von Störungen in der Matrix)

Geben Sie ein Beispiel für ein LP in Normalform an, das zeigt, dass eine Störung der Form $A \mapsto A + t\Delta A$ der Nebenbedingungsmatrix A für ein ΔA so dass $\operatorname{Rang}(A+t\Delta A) = m$ i. A. den optimalen Funktionswert nichtlinear ändern kann. Wie kommt es, dass diese Form der linearen Störung nicht zu linearen Änderungen im Optimalwert führt?

Hausaufgabe 7.3

(Kostensensitivität beim Mozartproblem)

Wir betrachten noch einmal das Mozartproblem (Beispiel 6.7) aus dem Skript in seiner Normalform:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \\ \text{und} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

mit den Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(Marzipan)} \\ \text{(Nougat)} \\ \text{(Schokolade)} \end{matrix}$$

und der eindeutigen primal optimalen Lösung $x^* = (5, 1, 2, 0, 0)^\top$ zur Basis $B = \{1, 2, 3\}$.

In dieser Aufgabe werden wir untersuchen, welche Auswirkungen die Änderung des Kostenvektors auf die Lösungsstruktur haben.

(i) Berechnen Sie die dualen Lösungen λ^* und μ^* und den dualen Optimalwert d^*.

(ii) Sind die Basisvektoren entartet?

(iii) Wie sieht die Optimalwertfunktion Φ für hinreichend kleine Δc aus? Wie kann man diese Funktion interpretieren?

(iv) Bestimmen Sie jeweils für $\Delta c \in \{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^5$ das maximale Interval, für das die Störung $t\Delta c$ die Lösungsstruktur des Problems nach Satz 10.1 nicht ändert. Entscheiden Sie außerdem, wie die Kostenfunktion entlang der Störung über die Intervallgrenzen hinaus verläuft. Wie lassen sich diese Störungsrichtungen und das Ergebnis interpretieren?

(v) Bestimmen Sie (wie in Punkt (iv)) diesmal für jede Wahl $\Delta c \in \{e_3, e_4\} \subseteq \mathbb{R}^5$ das maximale Interval, für das die Störung $t\Delta c$ die Lösungsstruktur des Problems nach Satz 10.1 nicht ändert. Entscheiden Sie außerdem, wie die Kostenfunktion entlang der Störung über die Intervallgrenzen hinaus verläuft. Wie lassen sich diese Störungsrichtungen und das Ergebnis interpretieren? Gibt es Unterschiede, wenn e_3 bzw. e_4 als Störung gewählt wird?

Hausaufgabe 7.4 (Sensitivitäten der rechten Seite b im Mozartproblem)

Wir betrachten wieder das Mozartproblem, aber interessieren uns dieses Mal für Veränderungen in der rechten Seite b.

(i) Wie sieht die Optimalwertfunktion Ψ für hinreichend kleine Δb aus? Wie kann man diese Funktion interpretieren?

(ii) Bestimmen Sie für $\Delta b \in \{e_1, e_2, e_3\} \in \mathbb{R}^3$ jeweils das maximale Interval $I(\Delta b)$, für das die Störung $t\Delta b$ die Lösungsstruktur des Problems nach Satz 10.2 nicht ändert.

(iii) Veranschaulichen Sie die Störungen an den Intervallgrenzen aus (ii) für $\Delta b = e_2$ graphisch und zeichnen Sie jeweils die neue Lösung ein.

https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/2023ws/lecture-grundlagen-der-optimierung