E. Herberg, M. Hashemi, V. Stein
Universität Heidelberg

Übung 6

Ausgabedatum: 20. November 2023
Abgabedatum: 26. November 2023

Hausaufgabe 6.1 (Simplex-Algorithmus)

Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \min & 3\,x_1 + x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 - 3x_2 & \leq & 1 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(i) Formen Sie das Optimierungsproblem in ein LP in Normalform um.

(ii) Lösen Sie das Programm „von Hand“ mit dem Simplex-Algorithmus. Starten Sie mit dem zu $(x_1, x_2) = (4, 1)$ gehörenden Basisvektor.

Hinweis: Zur Orientierung kann es hilfreich sein, das Problem vorher graphisch zu lösen.

Hausaufgabe 6.2 (Mehrere optimale Lösungen finden mit dem Simplex-Algorithmus)

Betrachten Sie das Mozartproblem (Beispiel 6.7) mit Kostenvektor $c = (-8, -8)^\intercal$.

Angenommen der Simplex-Algorithmus habe den optimalen Basisvektor $x^* = (5, 1)^\intercal$ mit $s^* = (2, 0, 0)^\intercal$ gefunden. Nutzen Sie den Simplex-Algorithmus, um einen weiteren optimalen Basisvektor zu bestimmen.

Hausaufgabe 6.3 (Post-Processing der Simplexphase I)

Gegeben sei ein lineares Programm in Normalform (Gleichung (6.6)), für das o. B. d. A. $b \geq 0$ ist. Um das Optimierungsproblem mit dem Simplex-Algorithmus (Algorithmus 7.6) lösen zu können, benötigt man eine Anfangsbasis zu einem zulässigen Basisvektor. Wenn $\operatorname{Rang} A = m$ ist und das Problem zulässig ist, dann kann ein solcher zulässiger Basisvektor durch Lösen des linearen Hilfsproblems (**Phase-I-Problem**)

$$\left.\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \mathbf{1}^\top z \quad \text{über } (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} \quad & Ax + z = b \\ \text{und} \quad & x \geq 0, \quad z \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Gleichung (7.7))}$$

mit $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$ mit dem Simplex-Algorithmus bestimmt werden, siehe Satz 7.10. Ist der berechnete optimale Basisvektor $(x^*, 0)^\top$ des Hilfsproblems nicht entartet, dann kann die dazugehörige Basis B^* sofort als Anfangsbasis für die Lösung des Ursprungsproblems verwendet werden. Andernfalls kann die Basis B^* noch Indizes in $\{n+1, \dots, n+m\}$ enthalten und muss daher modifiziert werden. Wie das geht, sehen wir hier.

Es seien $\operatorname{Rang} A = m$ und ein entarteter optimaler Basisvektor des Phase-I-Problems $(x^*, z^*)^\top$ mit $z^* = 0$ zur Basis B^* gegeben. Weiter sei $\ell \in \{n+1, \dots, n+m\} \cap B^*$.

(i) Zeigen Sie, dass ein Index $r \in \{1, \dots, n\} \setminus B^*$ existiert, sodass für den durch $[A, \mathrm{Id}_m]_{B^*} d_{B^*} = a_r$ definierten Vektor d die Aussage $d_\ell \neq 0$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $(x^*, 0)^\top$ für jeden Index r, der die Eigenschaft aus Punkt (i) besitzt, ebenfalls ein Basisvektor zur Indexmenge $B^+ := (B^* \cup \{r\}) \setminus \{\ell\}$ ist.

(iii) Beschreiben Sie, wie Sie einen Index r, der die Eigenschaft aus Punkt (i) besitzt, praktisch bestimmen können und wie Sie mit diesem Vorgehen aus einem optimalen Basis nach der Phase-I-Optimierung eine Anfangsbasis für die Optimierung des Ursprungsproblems generieren können.

Hausaufgabe 6.4 (Primal-duales Paar)

Gegeben sei ein primal-duales Paar von LPs mit primalem Problem in Normalform. Zeigen Sie, dass das duale Problem zu dem dualen Problem aus dem Paar äquivalent zu dem primalen Problem des Paars ist.

Hausaufgabe 6.5 (Programmieraufgabe - Simplex-Algorithmus)

Bearbeiten Sie `programmierung_simplex.ipynb`.

Abgabedatum Programmieraufgabe: 3.Dezember 2023

https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/2023ws/lecture-grundlagen-der-optimierung