E. Herberg, M. Hashemi, V. Stein
Universität Heidelberg

Übung 5

Ausgabedatum: 13. November 2023
Abgabedatum: 19. November 2023

Hausaufgabe 5.1 (Zusammenhang von Ecken/Extremalpunkten und zulässigen Basisvektoren)

Es sei P wie in (6.8) ein Polyeder in Normalform, und es gelte $\operatorname{Rang}(A) = m$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Ecke/ein Extremalpunkt von P.

(ii) $x \in \mathbb{R}^n$ ist zulässiger Basisvektor von P.

(iii) es existiert ein Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^n$, sodass $x \in \mathbb{R}^n$ die einzige Optimallösung des Problems

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } c^\top x \quad & \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass } Ax &= b \\ \text{und } x &\geq 0 \end{aligned}$$

ist.

Beachte: Die Äquivalenz von Aussagen (i) und (ii) ist genau die Aussage von Satz 6.16 aus dem Skript.

Hausaufgabe 5.2 (Darstellung von Ecken als Basisvektoren)

Betrachten Sie das Mozartproblem in Normalform (Beispiel 6.7) mit zulässigem Bereich wie in Abbildung 0.1.

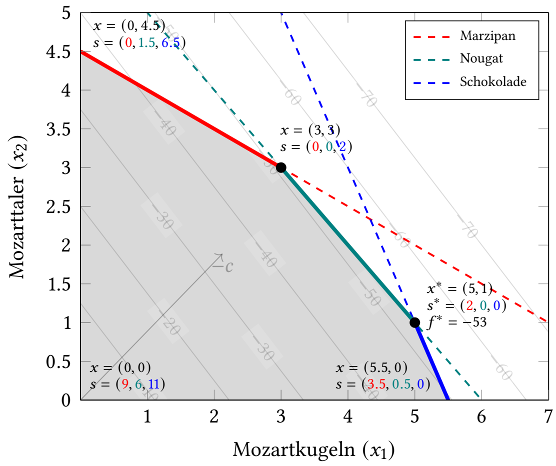

Abbildung 0.1: Zulässige Menge (Fünfeck), Niveaulinien der Zielfunktion und globaler Minimierer beim Mozartproblem.

(i) Geben Sie für alle 5 Ecken jeweils eine Basis an.

(ii) Sind diese Basen jeweils eindeutig?

(iii) Wie viele mögliche Basen gibt es insgesamt?

(iv) Zu welcher Basis gehört $x = (6, 0)^\intercal$ mit $s = (3, 0, -1)^\intercal$? Was ist das Problem an diesem Vektor?

Wir verändern jetzt die Aufgabe leicht, und zwar wird die Nougatbedingung zu:

$$x_1 + x_2 \leq 6 + 2/3.$$

(v) Skizzieren Sie die neue zulässige Menge.

(vi) Eine Ecke ist neu entstanden. Wie viele verschiedene Darstellungen als Basisvektor gibt es für diese Ecke?

Hausaufgabe 5.3 (Kostenvektoren)

Geben Sie für jede Ecke im Mozartproblem Abbildung 0.1 einen Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^5$ an, sodass diese Ecke die einzige Optimallösung des Mozartproblems ist.

Hausaufgabe 5.4

Wir betrachten das folgende LP in kanonischer Form

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & -x_1 - 2\,x_2 \text{ über } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & -2\,x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2\,x_2 \leq 7 \\ & x_1 \leq 3 \\ \text{und} \quad & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Verifizieren Sie, dass eine Lösung des Problems durch den optimalen Basisvektor $x^* = (3, 5)$ zur Normalformbasis $B = \{1, 2, 3\}$ gegeben ist, indem Sie die reduzierten Kosten $\tilde{c}_N$ berechnen.

https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/2023ws/lecture-grundlagen-der-optimierung