E. Herberg, M. Hashemi, V. Stein
Universität Heidelberg

Übung 4

Ausgabedatum: 6. November 2023
Abgabedatum: 12. November 2023

Hausaufgabe 4.1 (Modellierung eines Ernährungsproblems)

Das Original dieser Aufgabe (englisch: *nutrition problem*) findet sich in G. B. Dantzig (1963). *Linear Programming and Extensions.* The Rand Corporation. DOI: 10.7249/R366, Seite 117. (George Dantzig ist der Erfinder der Simplex-Methode.)

Für die sechs Nahrungsmittel seien die Nährwerte und die Anschaffungskosten pro Pfund und die täglichen Referenzwerte für die Zuführung der Nährwerte für eine Person wie unten gegeben.

	Contents and Costs Per Pound Purchased						Daily	
	Bread	Meat	Potatoes	Cabbage	Milk	Gelatin	Requirements	
Calories	1254	1457	318	46	309	1725	3000	
Protein	39	73	8	4	16	43	70	(grams)
Calcium	418	41	42	141	536	–	800	(mg.)
Vitamin A	–	–	70	860	720	–	500	(I.U.)
Cost	$ 0.30	$ 1.00	$ 0.05	$ 0.08	$ 0.23	$ 0.48	Minimum	

(i) Beschreiben Sie die Frage, in welchen Mengen diese Nahrungsmittel angeschafft werden sollten, um den täglichen Bedarf der Nahrungsmittel einer Person für einen Tag möglichst kostengünstig abzudecken, als lineare Optimierungsaufgabe in Normalform.

(ii) Modifizieren das LP aus Punkt (i) für den Fall, dass, bis auf die Kalorien, alle Nährwerte überschritten werden dürfen. Stellen Sie sicher, dass auch dieses LP Normalform hat.

Hausaufgabe 4.2 (Grafische Lösung)

Lösen Sie die folgende Aufgabe graphisch.

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & 4\,x_1 + 5\,x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ & x_1 + 3\,x_2 \leq 12 \\ \text{sodass} \quad & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 \leq 7 \\ \text{und} \quad & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Wie sieht die Lösung aus, wenn die Zielfunktion sich zu $f(x_1, x_2) = x_1 + 10x_2$ verändert?

Hausaufgabe 4.3 (Überführen auf Normalform)

Gegeben sei die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & -2\,x_1 - 3\,x_2 - 4\,x_3 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^3 \\ \text{sodass} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & 3\,x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_3 \leq 3 \end{aligned}$$

Überführen Sie das lineare Optimierungsproblem in ein äquivalentes Problem in Normalform.

Hausaufgabe 4.4 (Die Nicht-Kompaktheit aller nichtleeren Sublevelmengen sagt nichts über die Lösbarkeit eines LP aus.)

Die Kompaktheit einer nichtleeren Sublevelmenge ist zwar hinreichend (Satz 1.5), aber nicht notwendig für die Lösbarkeit eines LP.

Finden Sie jeweils ein Beispiel eines LP über $\mathbb{R}^2$, dessen Sublevelmengen alle unbeschränkt sind,

(i) aber das dennoch einen Minimierer besitzt.

(ii) das keinen Minimierer besitzt.

https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/2023ws/lecture-grundlagen-der-optimierung

Literatur

Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. The Rand Corporation. DOI: 10.7249/R366.