E. Herberg, M. Hashemi, V. Stein
Universität Heidelberg

Übung 3

Ausgabedatum: 30. Oktober 2023
Abgabedatum: 5. November 2023

Hausaufgabe 3.1 (Langsame Konvergenz des Newton-Verfahrens zur Nullstellensuche)

Wir wollen ausgehend vom Startpunkt $x^{(0)} = 1$ die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2$$

mit dem Newton-Verfahren bestimmen. Berechnen Sie die Iterierten, untersuchen Sie deren Konvergenz und ordnen Sie im Fall von Konvergenz der Folge den passenden Konvergenzbegriff zu. Warum ist das beobachtete Verhalten kein Widerspruch zu Satz 5.8?

Hausaufgabe 3.2 (Nichtkonvergenz des lokalen Newton-Verfahrens in der Optimierung)

Wir betrachten das lokale Newton-Verfahren (Algorithmus 5.1) zur Minimierung der Funktion $f(x) = \cos(x)$ (durch Anwendung auf die notwendigen Bedingungen erster Ordnung). Da die zweite Ableitung an den stationären Punkten nicht null ist, wissen wir, dass das Verfahren q-superlinear gegen einen stationären Punkt konvergiert, wenn man nur nah genug an diesem startet. Was schiefgehen kann, wenn man das nicht tut, wollen wir hier untersuchen.

(i) Bestimmen Sie einen Startpunkt $x^{(0)}$, so dass die Folge der Iterationspunkte $x^{(k)}$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

(ii) Bestimmen Sie einen Startpunkt $x^{(0)}$, sodass die Folge der Iterationspunkte zwischen zwei verschiedenen (nicht optimalen) Punkten alterniert.

Hausaufgabe 3.3

(Affine Invarianz des Newton-Verfahrens)

Wir wollen die (affine) Invarianz des lokalen Newton-Verfahrens zur Lösung von Gleichungen der Form $F(x) = 0$ mit stetig differenzierbarem $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Algorithmus 5.1) untersuchen.

Es seien dafür $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben, und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine vom Newton-Verfahren zum Startpunkt $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ erzeugte Folge von Iterierten. Zeigen Sie:

(i) Das Newton-Verfahren für die Funktion

$$G\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad G(y) := F(Ay + b)$$

zum Startpunkt $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ mit $x^{(0)} = Ay^{(0)} + b$ ist wohldefiniert und für die erzeugte Folge $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Iterierten gilt

$$x^{(k)} = Ay^{(k)} + b.$$

(ii) Das Newton-Verfahren für die Funktion

$$H\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad H(y) := AF(y)$$

zum Startpunkt $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ mit $x^{(0)} = y^{(0)}$ ist wohldefiniert und für die erzeugte Folge $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Iterierten gilt

$$x^{(k)} = y^{(k)}.$$

(iii) Erläutern Sie (intuitiv, nicht notwendigerweise mit Rechnungen oder Beispielen) was wir erwarten können, wenn wir die Transformation in Punkt (ii) um eine konstante Verschiebung auf

$$H\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad H(y) := AF(y) + b$$

erweitert wird.

Hausaufgabe 3.4 (Zur Einschränkung $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ und quadratischer Konvergenz)

Im globalisierten Newton-Verfahren (Algorithmus 5.11) aus der Vorlesung wird der Armijo-Schrittweitenparameter σ auf $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ eingeschränkt, damit im Laufe des Algorithmus die volle Schrittweite $t^{(k)} = 1$ für $k \geq k_0$ gewählt werden kann und das globalisierte Verfahren in das lokale Verfahren übergeht. Wir wollen diesen Zusammenhang untersuchen.

(i) Zeigen Sie, dass die Schrittweite $t^{(k)} = 1$ in Schritt k mit Newton-Schritt $d^{(k)} \neq 0$ für die quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x + \gamma$$

mit symmetrischer, positiv definiter Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, und $\gamma \in \mathbb{R}$ genau dann akzeptiert wird, wenn $\sigma \leq \frac{1}{2}$ ist.

(ii) Erläutern Sie (intuitiv, nicht notwendigerweise mit Rechnungen oder Beispielen), warum die Einschränkung auf $\sigma < \frac{1}{2}$ für allgemeine (nichtquadratische) Funktionen benötigt wird.

Hausaufgabe 3.5 (Programmieraufgabe - Newton Verfahren)

Bearbeiten Sie `programmierung_newton_verfahren.ipynb`.

https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/2023ws/lecture-grundlagen-der-optimierung