E. Herberg, M. Hashemi, V. Stein
Universität Heidelberg

Übung 1

Ausgabedatum: 16. Oktober 2023
Abgabedatum: 22. Oktober 2023

Hausaufgabe 1.1 (Klassifikation von Optimierungsaufgaben)

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben (i)–$(viii)$,

(a) ob es sich um eine *diskrete* oder *kontinuierliche* Optimierungsaufgabe handelt

(b) und ob die Aufgabe unrestringiert oder gleichungs-, ungleichungsbeschränkt oder beides ist,

(c) unzulässig oder unbeschränkt ist oder endlichen Optimalwert hat,

(d) linear oder quadratisch oder keines von beiden ist.

Begründen Sie Ihre Antworten.

(i)

$$\text{Minimiere} \quad -5x_1 - 7x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{sodass} \quad \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ -2x_1 + x_2 \leq 12 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

(ii)

$$\text{Minimiere} \quad 3x_1 + x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{Z}^2$$
$$\text{sodass} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq -2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

(iii)

$$\text{Minimiere} \quad \|Ax - b\|^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n$$

Dabei ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

(iv)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 49 - x_1^2 - x_2^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \\ \text{und} \quad & x_1 + 3x_2 = 10 \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & x_1 + x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \\ \text{und} \quad & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -3x_1 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} -x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 2x_1x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} (x_1+1)^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2} \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \\ \text{und} \quad & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

$(viii)$

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \exp(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & -x_1^2 - x_2^2 \leq -18 \\ \text{und} \quad & (x_1 - 3)(x_1 + 3) = 0 \end{aligned}$$

Hausaufgabe 1.2 (Epigraph-Charakterisierung von Unterhalbstetigkeit)

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Es sei $F \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge. Für eine Funktion $f : F \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(i) f ist unterhalbstetig auf F.

(ii) Der Epigraph der Funktion f

$$\operatorname{epi} f := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,\middle|\, \gamma \geq f(x) \right\}$$

ist abgeschlossen.

Hausaufgabe 1.3 (Gradienten bezüglich unterschiedlicher Skalarprodukte)

Wir definieren den Gradienten $\nabla_* f \in \mathbb{R}^n$ für $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ durch die Identität

$$f'(x)d = (\nabla_* f(x), d)_* \qquad \forall\, d \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

wobei $(\cdot, \cdot)_*$ ein Skalarprodukt sei.
Bestimmen Sie die Gradienten für $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1^3 + x_2(x_3^2 - 1) + \sin(x_4)$$

bezüglich der folgenden drei Skalarprodukte

$$(x, y)_e := x^\top y = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i,$$
$$(x, y)_s := \sum_{i=1}^{4} i x_i y_i,$$
$$(x, y)_M := x^\top M y,$$

wobei $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix ist.

Bonusfrage: Welche Matrix erzeugt das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_s$?

Hausaufgabe 1.4 (Stabilität der Minimiereigenschaft bei Konkatenation)

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $F \subseteq \mathbb{R}$ und $W = f(F) := \{f(x) \mid x \in F\}$ die Wertemenge von f über F. Es sei $g : W \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Wir betrachten die beiden Aufgaben

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{über } x \in F \tag{$*$}$$

und

$$\text{Minimiere} \quad g(f(x)) \quad \text{über } x \in F. \tag{$**$}$$

(i) Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist g auf der Menge W monoton wachsend, dann ist jeder lokale Minimierer von ($*$) auch ein lokaler Minimierer von ($**$).

(ii) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass auf die Monotonie von g in Punkt (i) nicht verzichtet werden kann.

(iii) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass unter den Voraussetzungen in Punkt (i) die Aufgabe ($**$) lokale Minimierer besitzen kann, die keine lokalen Minimierer von ($*$) sind. Finden Sie dann eine zusätzliche Voraussetzung an g, unter der beide Aufgaben genau dieselben lokalen Minimierer besitzen, und beweisen Sie diese Aussage.

https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/2023ws/lecture-grundlagen-der-optimierung